

1.1.14 Rovnice rovnoměrně zrychleného pohybu

Předpoklady: 1113

Pedagogická poznámka: Stejně jako u předchozí hodiny je i v této hodině potřeba postupovat tak, aby studenti měli minimálně 15 minut na řešení příkladů 6, 7, 8. Snažím se kvůli tomu neobětovat příklad 5 (ten se studentům bude hodit), spíše odvození vzorců pomocí plochy pod grafem jenom ukážu s tím, že si ho studenti nemají psát (v případě potřeby ho najdou v učebnici).

Co zatím víme o rovnoměrně zrychleném pohybu (srovnání s rovnoměrným pohybem):

rovnoměrný pohyb	rovnoměrně zrychlený pohyb
$v = \text{konstanta}$ $s = s_0 + vt$	$a = \text{konstanta}$ $v = v_0 + at$ $s = ?$

Chybí rovnice pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu, tato rovnice nebude mít obdobu u rovnoměrného pohybu.

Nejdříve zkusíme získat rovnici dráhy pro jednodušší případ = pohyb s nulovou počáteční rychlostí

Nápad: Při výpočtu zrychlení jsme dvakrát dělili dráhu časem \Rightarrow při výpočtu dráhy ze zrychlení musíme dvakrát časem násobit \Rightarrow možný vzorec $s = at^2$

Pedagogická poznámka: Snažím se, aby návrh na vzorec podal někdo ze studentů. Zatím se pokaždé někdo našel, mezi zajímavé zdůvodnění druhé mocniny patří nápad, že stejně jako u rovnoměrného pohybu musíme vynásobit rychlost časem.

Př. 1: Proveď jednotkovou kontrolu vzorce $s = at^2$.

Dosadíme za veličiny jednotky: $s = at^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1\text{s})^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^2 = 1 \text{m}$

Rozměrově je náš vzorec správný.

Př. 2: Ověř vzorec pro výpočet dráhy z údajů naměřených při pádu míče.

čas [s]	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
dráha [m]	0,000	0,001	0,011	0,035	0,074	0,128	0,196
rychlost [m/s]	0,000	0,020	0,200	0,480	0,780	1,080	1,360
zrychlení [m/s ²]	0,000	0,4	3,600	5,600	6,000	6,000	5,600

Zkusíme podle našeho vzorce vypočítat dráhu míče za 0,3 s a srovnáme ji s dráhou v tabulce. Jakou hodnotu zrychlení pro výpočet použít?

Předpokládáme, že se míč pohyboval se stále stejným zrychlením \Rightarrow použijeme průměrné zrychlení za prvních 0,3 sekundy:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1,360 - 0}{0,3 - 0} \text{ m/s}^2 = 4,53 \text{ m/s}^2$$

$s = at^2 = 4,53 \cdot 0,3^2 \text{ m} = 0,4077 \text{ m} \Rightarrow$ hodnota v tabulce je přibližně poloviční \Rightarrow nejde o žádnou oslnivou shodu.

Zkusíme ještě prvních 0,2 s:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,780 - 0}{0,2 - 0} \text{ m/s}^2 = 3,9 \text{ m/s}^2$$

$s = at^2 = 3,9 \cdot 0,2^2 \text{ m} = 0,156 \text{ m} \Rightarrow$ hodnota v tabulce je opět přibližně poloviční \Rightarrow

správný vzorec má zřejmě tvar $s = \frac{1}{2} at^2$

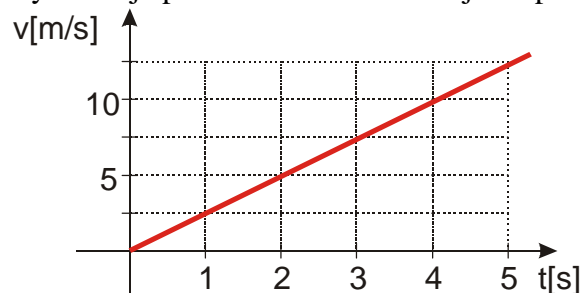
Pedagogická poznámka: Ještě než studenti začnou příklad řešit je dobré si popovídat, jaké zrychlení by měli do vzorce použít. Pro porovnání spočtené a naměřené dráhy je lepší si hodnoty zaokrouhlit (stejně nejsou přesné).

Jak jinak odvodit vzorec pro dráhu?

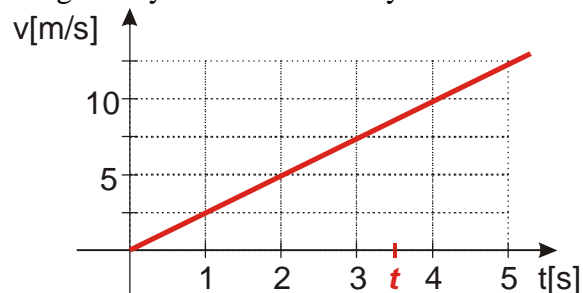
Víme, že dráhu libovolného pohybu můžeme určit jako plochu pod grafem rychlosti.

Př. 3: Nakresli graf rychlosti libovolného rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí.

Rychlost je přímo úměrná času \Rightarrow jde o přímku procházející počátkem.

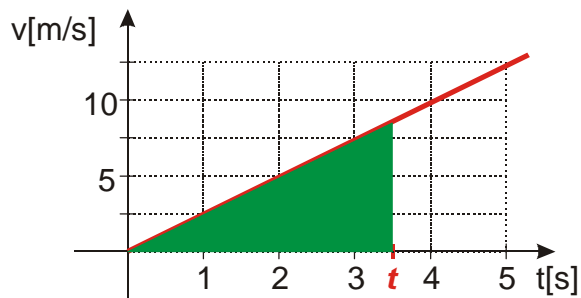


Do grafu vyznačíme libovolný čas t .



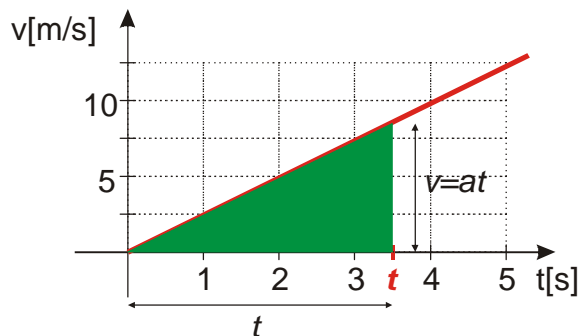
Př. 4: Zakresli do grafu dráhu uraženou od začátku pohybu do času t . Urči tuto dráhu. Předpokládej rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a .

Dráha odpovídá ploše pod grafem rychlosti



Vyznačená plocha tvoří pravoúhlý trojúhelník

$$S = \frac{ab}{2}$$



Velikosti stran:

vodorovná $a = t$ (od počátku pohybu uplynul právě vyznačený čas t)

svislá $b = v = at$ (od počátku pohybu získal předmět okamžitou rychlost $v = at$)

Dosadíme do vzorce:

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{vt}{2} = \frac{(at)t}{2} = \frac{1}{2}at^2 = s$$

Dodatek: Z obrázku je velmi dobře vidět, proč vzorec $s = vt = (at)t = at^2$ dává dvojnásobnou hodnotu. Za rychlost do vzorce, který je jinak vzorcem pro dráhu rovnoměrného pohybu dosazujeme rychlost, kterou při zrychlování předmět dosáhne až na konci sledovaného intervalu a tak dráha vyjde větší než jaká ve skutečnosti je. Správnější by bylo dosadit průměr z počáteční a koncové rychlosti $\frac{0+v}{2} = \frac{v}{2} = \frac{at}{2}$, čímž dojdeme opět ke správnému vzorci $s = \frac{1}{2}at^2$.

Získali jsme stejný vzorec jiným postupem \Rightarrow asi máme pravdu.

Jak se vzorec změní, když počáteční rychlost nebude nulová?

Př. 5: Představíme si vlak jedoucí rovnoměrně po kolejích rychlostí v_0 . Uvnitř vlaku se začne průvodčí rozbíhat za černým pasažérem rovnoměrně zrychleně s nulovou počáteční rychlostí a zrychlením a . Urči:

- Jakou dráhu urazí vlak za čas t vzhledem k nádraží.
- Jakou dráhu urazí za čas t vzhledem k vlaku průvodčí
- Jakým způsobem se pohybuje průvodčí vzhledem k nádraží.
- Jakou dráhu urazí za čas t průvodčí vzhledem k nádraží.

a) Jakou dráhu urazí vlak za čas t vzhledem k nádraží.

Vlak se vzhledem k nádraží pohybuje rovnoměrně $\Rightarrow s = v_0 t$

b) Jakou dráhu urazí za čas t vzhledem k vlaku průvodčí

Průvodčí se vzhledem k vlaku pohybuje rovnoměrně zrychleně s nulovou počáteční rychlostí

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2} a t^2$$

c) Jakým způsobem se pohybuje průvodčí vzhledem k nádraží.

Vzhledem k nádraží se průvodčí pohybuje rovnoměrně zrychleně s nenulovou počáteční rychlostí.

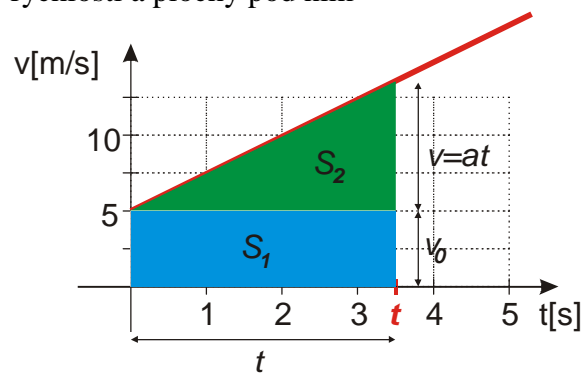
d) Jakou dráhu urazí za čas t průvodčí vzhledem k nádraží.

průvodčí urazí jednak dráhu, kterou uběhne a jednak dráhu, kterou ujede s vlakem \Rightarrow

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

Pedagogická poznámka: Ačkoliv jsme dosud neřešili problém vztažných soustav nemají studenti s předchozím příkladem problémy a pokud ano, tak hned v bodě a), kde se bojí napsat $s = v_0 t$.

Správnost výsledku opět můžeme potvrdit pomocí grafu rychlosti s nenulovou počáteční rychlostí a plochy pod ním



$$S = S_1 + S_2 = v_0 t + \frac{1}{2} a (at) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = s$$

Můžeme doplnit naši tabulku:

rovnoměrný pohyb	rovnoměrně zrychlený pohyb
$v = \text{konstanta}$	$a = \text{konstanta}$

$$s = s_0 + vt$$

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

Pedagogická poznámka: Následující příklady musí studenti řešit zcela sami. Nejde o nic těžkého, jde o jeden z rozhodujících okamžiků (spolu s následujícími dvěma hodinami) v tom, zda budou dále schopni počítat příklady sami nebo budou už navždy odkázáni na opisování z tabule. Trvám na tom, že řešení musí obsahovat vzorec, do kterého dosazují, dosazení konkrétních (v případě potřeby převedených) hodnot (zdroj největšího množství chyb v následujících příkladech) a výsledek. Mezivýpočty se snažím potlačovat, vedou k nepřesnostem a omylům (Ve třídách, kde učím i matematiku, mají studenti za sebou dvě hodiny cvičení práce s kalkulátorem, takže pro ně nesmí být problém počítat všechny výsledky ve fyzice na kalkulátoru naráz.)

Př. 6: Urči dráhu, kterou urazí za 1 s kámen puštěný z věže padající se zrychlením 10 m/s^2 .

$$v_0 = 0, \quad a = 10 \text{ m/s}^2, \quad t = 1 \text{ s}, \quad s = ?$$

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 \text{ m} = 5 \text{ m}$$

Kámen urazí během první sekundy volného pádu 5 m.

Př. 7: Řidič po projetí vesnice rychlostí 50 km/h šlápne na plyn a začne zrychlovat se zrychlením $2,1 \text{ m/s}^2$. Urči jeho rychlost po pěti sekundách. Kolik metrů od cedule při tom ujel?

Musíme převést rychlost na m/s

$$v_0 = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}, \quad a = 2,1 \text{ m/s}^2, \quad t = 5 \text{ s}, \quad v = ? \quad s = ?$$

$$v = v_0 + at = 13,9 + 2,1 \cdot 5 \text{ m/s} = 24,4 \text{ m/s} = 87,8 \text{ km/h}$$

$$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 13,9 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2,1 \cdot 5^2 \text{ m} = 95,7 \text{ m}$$

Řidič zrychlil na 87,8 km/h a ujel při tom 95,7 m.

Př. 8: Urči za jak dlouho spadne z výšky 1,56 m nafukovací míč, pokud padá se zrychlením $5,8 \text{ m/s}^2$.

$$v_0 = 0, \quad a = 5,8 \text{ m/s}^2, \quad s = 1,56 \text{ m}, \quad t = ?$$

Z rovnice pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu vyjádříme čas.

$$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$$

$$2s = at^2$$

$$t^2 = \frac{2s}{a}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,56}{5,8}} \text{ s} = 0,73 \text{ s}$$

Míč spadne za 0,73 s (což přesně odpovídá naměřeným hodnotám).

Shrnutí: Pro rovnoměrně zrychlený pohyb platí tyto rovnice $a = \text{konstanta}$, $v = v_0 + at$,

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 .$$