1.1.18 Rovnoměrně zrychlený pohyb v příkladech IV

Předpoklady: 1117

Pedagogická poznámka: Česká škola v současné době budí ve studentech představu, že problémy se řeší zásadně najednou. Studenti tak mají obrovské problémy v příkladech v této hodině, které vyžadují postupné řešení a rozložení na menší části, které se pak řeší samostatně. Situace se nedá změnit během této jediné hodiny a potáhne se delší dobu. Každopádně je třeba studenty hlídat a vždy v takových situacích zdůrazňovat podstatu problém (není ve fyzice) a jak postupnost řešení (můžu řešit i v případě, že na začátku nevím, jak dojít až do konce), tak rozkládání na podpříklady (teď se budeme zabývat pouze první částí pohybu). Nácvik obou dovedností chvíli trvá, ale moje zkušenosti ukazují, že při cíleném zaměření tímto směrem je možné dosáhnout značného pokroku.

Pedagogická poznámka: Studenti mají už s prvním příkladem takové problémy, že je lepší je postrkovat u tabule než nechat celé příklady řešit samostatně a pomáhat pouze v lavicích. Po každém prozrazeném kroku by však měli dostat čas na přemýšlení.

Př. 1: Stojící auto nejdříve 200 metrů rovnoměrně zrychlovalo a pak jelo dvě hodiny přibližně rovnoměrně. Jakou ujelo vzdálenost, když se rozjíždělo dvacet sekund?

$s_z = 200\,\text{m}$ $\quad t_z = 20\,\text{s}$ $\quad t_r = 2\,\text{h}$ $\quad s_r = ?$

Auto se pohybovalo rovnoměrným pohybem:

$s_r = v_r t_r$

Rychlost, kterou se auto pohybovalo při rovnoměrné části svého pohybu, se rovná rychlosti, kterou mělo na konci zrychlování $\Rightarrow$ rozdělíme řešení na dvě části:

- z počáteční rovnoměrně zrychlené části pohybu spočteme konečnou rychlost
- spočtenou rychlost použijeme jako rychlost rovnoměrného pohybu v druhé části

Auto se rozjíždělo z klidu $\Rightarrow$ pro zrychlený pohyb použijeme zjednodušenou soustavu:

$v_z = at_z$, $s_z = \frac{1}{2}at_z^2$

Z první rovnice vyjádříme zrychlení a dosadíme ho do druhé: $v_z = at_z \Rightarrow a = \frac{v_z}{t_z}$

$$s_z = \frac{1}{2}at_z^2 = \frac{1}{2}\frac{v_z}{t_z}t_z^2$$

$$s_z = \frac{1}{2}v_z t_z$$

$$v_z = \frac{2s_z}{t_z}$$

Vypočtená rychlost je také rychlostí rovnoměrného pohybu: $v_r = v_z = \frac{2s_z}{t_z}$

$$s_r = v_r t_r = \frac{2s_z}{t_z}t_r$$

$$s_r = \frac{2s_z}{t_z}t_r = \frac{2\cdot 200}{20}7200\,\mathrm{m} = 144000\,\mathrm{m} = 144\,\mathrm{km}$$

Auto ujelo během rovnoměrné části svého pohybu 144 km.

Poznámka: Výsledek bychom mohli také získat méně elegantně, ale přirozeněji postupným výpočtem: $v = \frac{2s_1}{t_1} = \frac{2\cdot 200}{20} = 20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$

$s_2 = vt_2 = 72\cdot 2\,\mathrm{km} = 144\,\mathrm{km}$

Pedagogická poznámka: Studenti mají tendenci nepsat indexy, proto v případě, že se snaží dotáhnout příklad do obecného řešení dojdou k výsledku $s_r = vt = \frac{2s}{t}t = 2s$.

Myslím, že tento výsledek je poměrně přesvědčivým důkazem, že indexy svoji cenu mají.

Př. 2: Automobil jede rychlostí 60 km/h, když před něj neočekávaně vběhne z chodníku dítě. Urči vzdálenost, kterou auto ujede než zastaví, pokud řidiči trvá 0,8 s než zareaguje a začne brzdit (Tomuto času se říká reakční doba a závisí na kondici a tréninku řidiče. Reakční doba se prodlužuje po požití alkoholických nápojů.). Zpomalení auta je $6\,\mathrm{m/s^2}$ (jeho hodnota závisí na povětrnostních podmínkách, typu povrchu a pneumatik). Jak se dráha, kterou ujede auto změní při počáteční rychlosti 50 km/h?

$v_{r1} = 60\,\mathrm{km/h} = 16{,}7\,\mathrm{m/s}$ $\quad v_{r2} = 50\,\mathrm{km/h} = 13{,}9\,\mathrm{m/s}$ $\quad t_r = 0{,}8\,\mathrm{s}$ $\quad a = -6\,\mathrm{m/s^2}$

$v_z = 0\,\mathrm{m/s}$ $\quad s_1 = ?$ $\quad s_2 = ?$

Příklad má dvojí zadání $\Rightarrow$ odvodíme si obecné řešení, aby stačilo pouze změnit dosazované hodnoty:

Pohyb (a tím také uražená dráha) auta se skládá ze dvou částí:

- nejdříve se auto pohybuje 0,8 s rovnoměrně (než řidič začne brzdit): $s_r = v_r t_r$ (všechno známe)
- pak se auto pohybuje rovnoměrně zpomaleně: $s_z = v_{0z}t_z + \frac{1}{2}at_z^2$, dráhu zpomaleného pohybu musíme vypočítat:

Dobu, po kterou auto zpomaluje, musíme určit z rovnice pro rychlost:

$v_z = v_{0z} + at_z \Rightarrow t_z = \frac{v_z - v_{0z}}{a} = -\frac{v_{0z}}{a}$ (auto zastaví $\Rightarrow$ platí $v_z = 0$)

$$s_z = v_{0z}t_z + \frac{1}{2}at_z^2 = v_{0z}\left(-\frac{v_{0z}}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_{0z}}{a}\right)^2$$

$$s_z = -\frac{v_{0z}^2}{a} + \frac{1}{2}a\frac{v_{0z}^2}{a^2} = -\frac{v_{0z}^2}{a} + \frac{v_{0z}^2}{2a} = -\frac{v_{0z}^2}{2a}$$

Sečteme vztahy pro obě dráhy: $s = s_r + s_z = v_r t_r - \frac{v_{0z}^2}{2a}$

platí: $v_r = v_{0z}$ (auto zpomaluje z rychlosti, kterou jelo předtím rovnoměrně)

$$s = v_r t_r - \frac{v_r^2}{2a}$$

dosadíme: ¨

$$s_{60}=v_0t_r-\frac{v_0^2}{2a}=16,7\cdot 0,8-\frac{16,7^2}{2\cdot(-6)}\,\mathrm{m}=36,6\,\mathrm{m}$$

$$s_{50}=v_0t_r-\frac{v_0^2}{2a}=13,9\cdot 0,8-\frac{13,9^2}{2\cdot(-6)}\,\mathrm{m}=27,2\,\mathrm{m}$$

Automobil zastaví při počáteční rychlosti 60 km/h na dráze 36,6 m, při počáteční rychlosti 50 km/h na dráze 27,2 m.

Poznámka: Všimněte si, že ačkoliv se rychlost automobilu zmenšila o šestinu dráha se zmenšila o více než čtvrtinu. Tento fakt je hlavním důvodem pro snížení povolené rychlosti v obcích z 60 km/h na 50 km/h.

Př. 3: Vlak se rozjížděl po dobu 75 s se stálým zrychlením $0,2\,\mathrm{m/s^2}$. Jakou dráhu urazil v poslední vteřině?

$t=75\,\mathrm{s}$ $\quad a=0,2\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad \Delta s=?$

Ze vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb můžeme snadno spočítat dráhu, kterou vlak urazí od počátku zrychlování do libovolného okamžiku. Dráhu, kterou urazí v poslední vteřině, tak nejsnáze určíme jako rozdíl dráhy, kterou ujel vlak od začátku zrychlování do konce poslední vteřiny, a dráhy, kterou ujel od začátku zrychlování do konce předposlední vteřiny.

Dráha ujetá do konce předposlední vteřiny (tedy za čas $t-1$): $\quad s_{t\text{-}1}=\frac{1}{2}\cdot a(t-1)^2$

Dráha ujetá do konce poslední vteřiny (tedy za čas t): $\quad s_t=\frac{1}{2}at^2$

$$\Delta s=s_t-s_{t-1}=\frac{1}{2}at^2-\frac{1}{2}a\cdot(t\text{-}1)^2$$

$$\Delta s=\frac{1}{2}a\cdot\left[t^2-(t\text{-}1)^2\right]$$

$$\Delta s=\frac{1}{2}a\cdot\left[t^2-t^2+2t\text{-}1\right]$$

$$\Delta s=\frac{1}{2}a(2t\text{-}1)$$

$$s=\frac{1}{2}\cdot 0,2\cdot(2\cdot 75-1)=0,1\cdot 149=14,9\,\mathrm{m}$$

Vlak urazil v poslední vteřině zrychlování dráhu 14,9 m.

Poznámka: Na první pohled by se mohlo zdát, že vztah $\Delta s=\frac{1}{2}a(2t\text{-}1)$ není rozměrově v pořádku, protože na pravé straně není čas v druhé mocnině. Je potřeba si uvědomit, že tento vztah vznikl částečným dosazením za čas a ve skutečnosti znamená: $\Delta s=\frac{1}{2}a(2t\cdot 1-1\cdot 1)$, kde přidané jedničku představují o jednu sekundu kratší čas dráhy do konce předposlední sekundy.

Př. 4: Stojící sportovní automobil začal rovnoměrně zrychlovat a během čtvrté sekundy svého pohybu urazil 21 m. Urči jeho zrychlení.

$\Delta s = 21\,\text{m}$ $\quad v_0 = 0\,\text{m/s}$ $\quad a = ?$

Dráhu uraženou během čtvrté sekundy můžeme určit jako rozdíl dráhy uražené od počátku pohybu do konce čtvrté sekundy (s_4) a dráhy uražené od počátku pohybu do konce třetí sekundy (s_3). Tyto dráhy můžeme určit pomocí vzorců pro rovnoměrně zrychlený pohyb a s jejich pomocí určit zrychlení.

$$s_4 = \frac{1}{2}at_4^2,\ s_3 = \frac{1}{2}at_3^2$$

$$\Delta s = s_4 - s_3 = \frac{1}{2}at_4^2 - \frac{1}{2}at_3^2$$

$$\Delta s = \frac{1}{2}a\left(t_4^2 - t_3^2\right)$$

$$\frac{2\Delta s}{t_4^2 - t_3^2} = a$$

$$a = \frac{2\Delta s}{t_4^2 - t_3^2} = \frac{2\cdot 21}{4^2 - 3^2}\,\text{m/s}^2 = 6\,\text{m/s}^2$$

Auto se pohybovalo se zrychlením $6\,\text{m/s}^2$.

Pedagogická poznámka: Diskusi o příkladu začínáme právě tím, jaký význam má dráha 21 m. Jakmile studenti zjistí, že jde o změnu dráhy, je všechno jednodušší.

Př. 5: Urči rychlost, kterou běžel D. Bailey v druhé části svého rekordního běhu na 100 m. Jeho tehdejší čas byl 9.89 s. Předpokládej, že zrychloval první tři sekundy a pak již běžel rovnoměrně.

$t = 9{,}89\,\text{s}$ $\quad s = 100\,\text{m}$ $\quad t_z = 3\,\text{s}$ $\quad v_r = ?$

Podle zadání se rekordmanův běh dá rozdělit na dvě části – část rovnoměrně zrychlenou (budeme používat index z) a část rovnoměrnou (index r). Dráhy obou částí dají dohromady 100 m, časy pak 9,89 s. K výpisu veličin pak můžeme ihned dodat $t_r = 7{,}89\,\text{s}$. Výrazy pro dráhy obou částí pohybu budeme upravovat tak, aby v nich zůstaly pouze hodnoty času a konečné rychlosti zrychlené části (je zároveň rychlostí rovnoměrné části).

Dráha běhu $s = s_z + s_r$.

Platí $s_z = \frac{1}{2}at_z^2$ (rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí) a $s_r = vt_r$.

Dosadíme: $s = \frac{1}{2}at_z^2 + vt_r$. V rovnici máme dvě neznámé (a a v) $\Rightarrow$ jednu z nich musíme vyjádřit pomocí druhé: hodnotu zrychlení určíme pomocí vzorce pro rychlost zrychleného pohybu: $v = at_z \Rightarrow a = \frac{v}{t_z}$. Dosadíme:

$$s = \frac{1}{2}\frac{v}{t_z}t_z^2 + vt_r$$

$$s = \frac{1}{2}vt_z + vt_r \quad /\cdot 2$$

$$2s = vt_z + 2vt_r$$

$$2s = v\left(t_z + 2t_r\right)$$

$$\frac{2s}{t_z + 2t_r} = v$$

$$v = \frac{2s}{t_z + 2t_r} = \frac{2 \cdot 100}{3 + 3 \cdot 6{,}89}\,\mathrm{m/s} = 11{,}92\,\mathrm{m/s} = 42{,}9\,\mathrm{km/h}$$

D. Bailey běžel v druhé části svého rekordního běhu rychlosti 42,9 km/h.

Shrnutí: Složitější úlohy je nutné řešit postupným dosazováním.