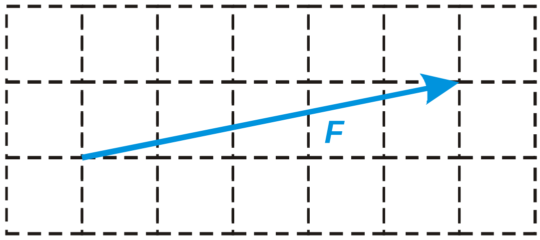
1.1.25 Vektory II

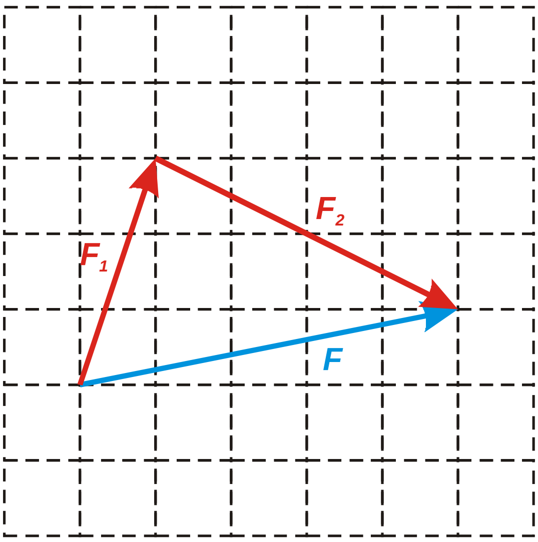
Předpoklady: 1124

Umíme už vektory sčítat, teď zkusíme opačnou operací – rozklad vektoru na složky.

Př. 1: Na obrázku je nakreslena síla $\boldsymbol{F}$. Nakresli do obrázku síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ tak, aby platilo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$. Kolik má úloha řešení?

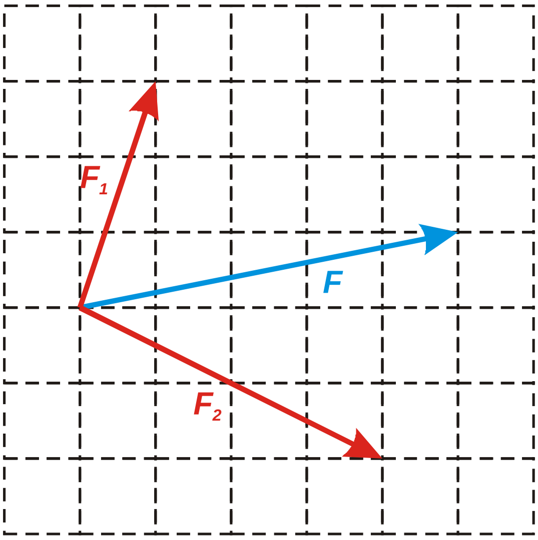


Stačí nakreslit sílu libovolnou sílu $\boldsymbol{F}_1$, která má se silou $\boldsymbol{F}$ stejný počáteční bod. Síla $\boldsymbol{F}_2$ bude spojovat konečné body sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}$.



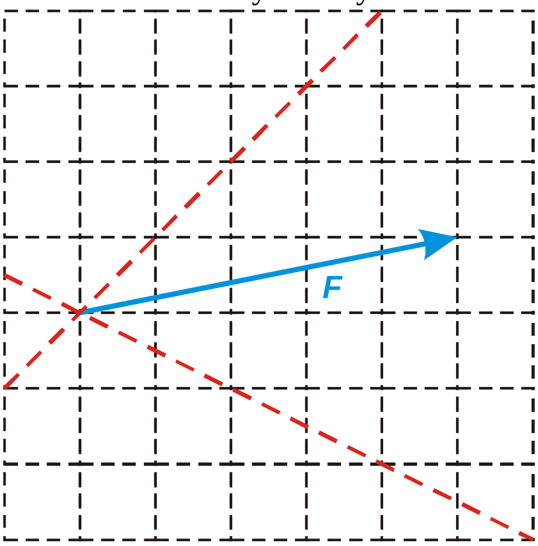
Možných řešení je nekonečně mnoho.

Obrázek není zcela správný. Síla $\boldsymbol{F}_2$ by měla mít stejné působiště jako síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}_1$:

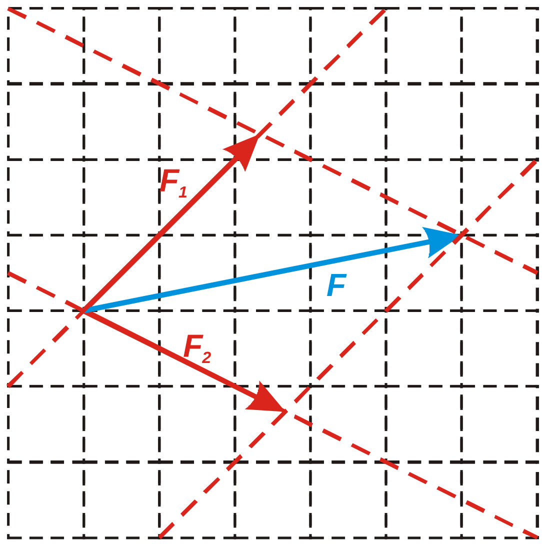


Pokud chceme, aby řešení bylo jednoznačné, musíme dopředu určit směry sil, na které chceme sílu $\boldsymbol{F}$ rozložit.

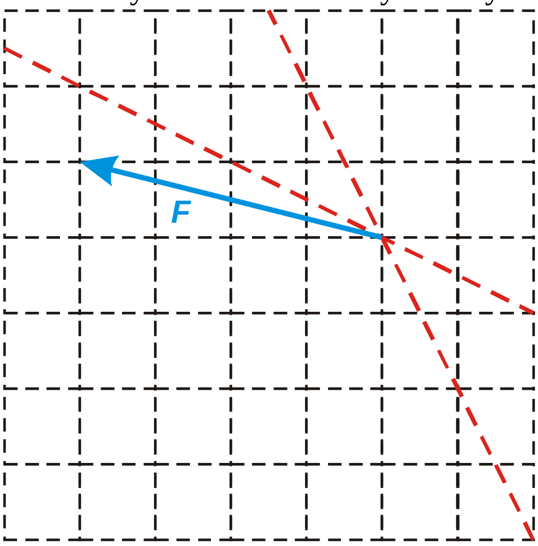
Př. 2: Rozlož sílu $\boldsymbol{F}$ do vyznačených směrů.

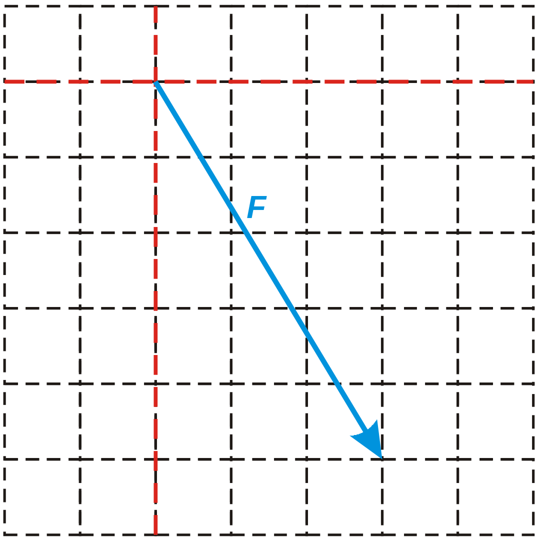


Nakreslíme z konečného bodu síly $\boldsymbol{F}$ rovnoběžky s vyznačenými směry a tím dokreslíme rovnoběžník.

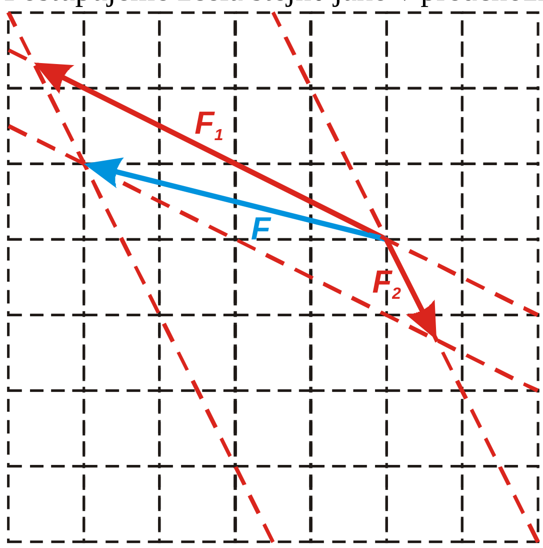


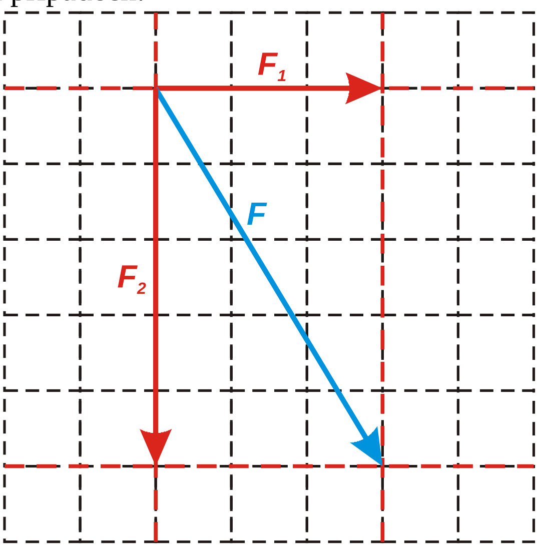
Př. 3: Rozlož síly na obrázcích do vyznačených směrů:





Postupujeme zcela stejně jako v předchozích případech:



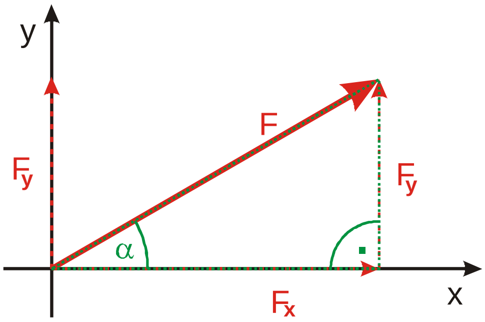


Pedagogická poznámka: Levý obrázek je u slabších studentů nutné kontrolovat. Není to tak jednoznačné, jak to vypadá. Rovnoběžky sice nakreslí dobře, ale vytahují občas špatně.

Nejčastěji se vektory rozkládají do navzájem kolmých směrů. Souvisí to s tím, že kartézská soustava souřadnic má dvě navzájem kolmé osy a rozklad do těchto směrů lze pomocí goniometrických funkcí poměrně snadno provést i číselně.

Př. 4: Síla o velikosti 30 N svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°. Urči vodorovnou a svislou složku této síly.

Nakreslíme si obrázek:



Hledané složky vektoru tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

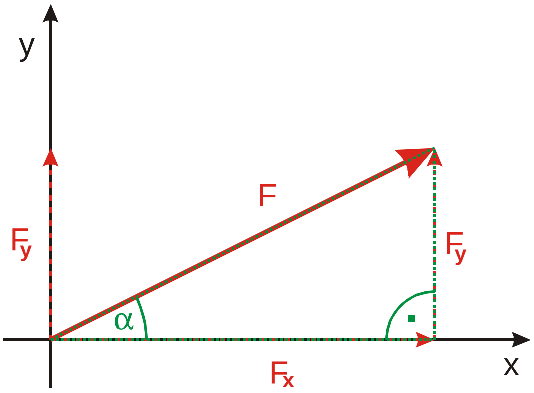
- $\sin\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F\cdot\sin\alpha = 30\cdot\sin 30°\ \mathrm{N} = 15\ \mathrm{N}$
- $\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\cdot\cos\alpha = 30\cdot\cos 30°\ \mathrm{N} \doteq 26\ \mathrm{N}$

Př. 5: Střela byla vystřelena rychlostí 20 m/s pod úhlem 50° s vodorovnou rovinou. Urči vodorovnou a svislou složku vektoru rychlosti.

Obrázek by byl prakticky stejný jako v předchozím příkladě $\Rightarrow$

- $\sin\alpha = \frac{v_y}{v} \Rightarrow v_y = v\cdot\sin\alpha = 20\cdot\sin 50°\ \mathrm{m/s} = 15{,}3\ \mathrm{m/s}$
- $\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v_x = v\cdot\cos\alpha = 20\cdot\cos 50°\ \mathrm{m/s} = 12{,}9\ \mathrm{m/s}$

Př. 6: Síla má dvě složky $F_x = 8\,\mathrm{N}$ a $F_y = 4\,\mathrm{N}$. Urči velikost síly *F* a úhel, který svírá s osou *x*.

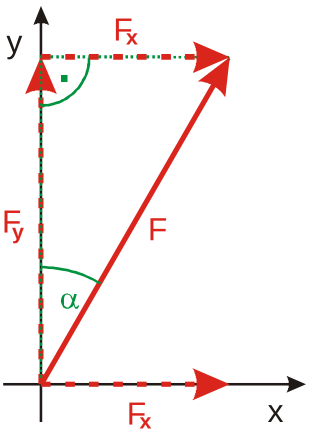


Z obrázku je vidět:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8{,}94\,\mathrm{N}$$

Pro úhel α: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} \Rightarrow \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{F_y}{F_x}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{4}{8}\right) = 26{,}57°$

Př. 7: Síla o velikosti 50 N svírá s osou *y* úhel $\alpha = 35°$. Urči velikost jejích složek F_x a F_y.

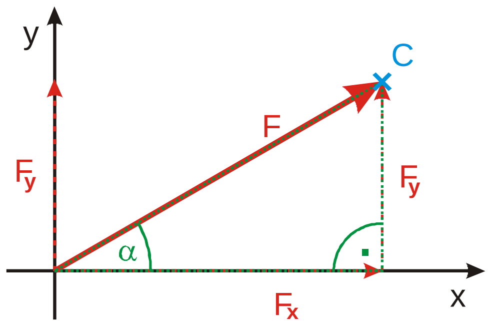


Z obrázku je vidět:

$$\sin\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \cdot \sin\alpha = 50 \cdot \sin 35° = 28{,}69\,\mathrm{N}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \cdot \cos\alpha = 50 \cdot \cos 35° = 40{,}96\,\mathrm{N}$$

Pedagogická poznámka: U předchozích příklad jste zcela odkázáni na matematiku. Já tady využil toho, že ve stejné třídě učím i matematiku, kde goniometrické funkce proberu na začátku roku i s využitím ve fyzice a látku prohlásím za červené rámečky (to, co si musí studenti pamatovat pořád). Pro mě překvapivě ani po šesti měsících s tím studenti neměli problémy.

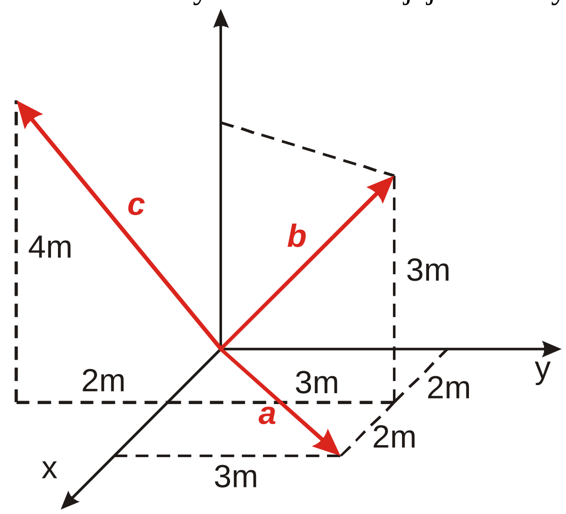


Je dobré si všimnout, že složky F_x, F_y vektoru $\boldsymbol{F}$ jsou zároveň souřadnicemi bodu C (koncového bodu vektoru $\boldsymbol{F}$).
Platí to tak vždy?
Pouze, když vektor začíná v počátku souřadnic.

Podobně to platí i v prostoru. Zde má vektor $\boldsymbol{F}$ samozřejmě tři složky F_x, F_y, F_z.

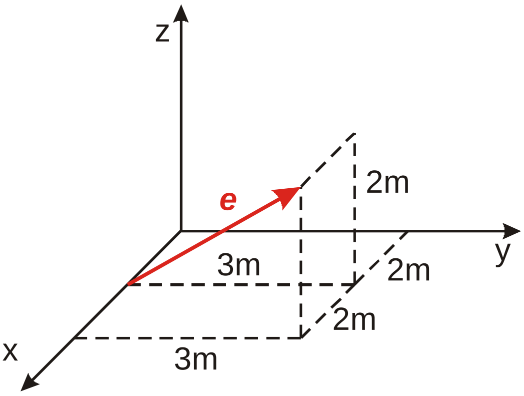
Vektory tak můžeme zapsat pomocí jeho složek podobně jako se zapisují souřadnice bodů, jenom se používají kulaté závorky $\boldsymbol{F} = (F_x; F_y) = (26;15)$. (Vyjádření vektoru $\boldsymbol{v}$ v zadání pomocí jeho velikosti a úhlu je vlastně vyjádřením polohy bodu C v poláních souřadnicích.)

Př. 8: Rozlož vektory na obrázku na jejich složky:

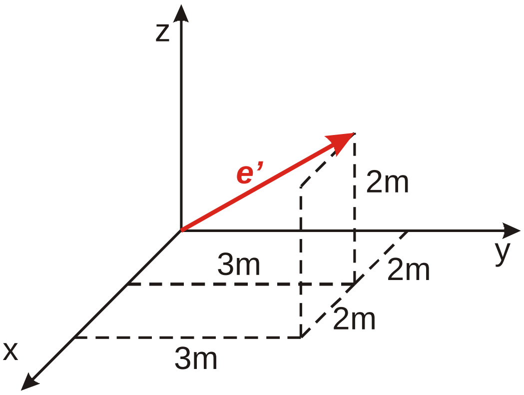


Určíme vlastně souřadnice koncových bodů jednotlivých vektorů (stejně jako v předminulé hodině):
$\boldsymbol{a} = (4;3;0)$
$\boldsymbol{b} = (2;3;3)$
$\boldsymbol{c} = (2;-2;4)$.

Př. 9: Najdi složky vektoru $\boldsymbol{e}$.



Problém: Vektor nemá počátek v počátku soustavy souřadnic $\Rightarrow$ přesuneme si ho do počátku a pak normálně odečteme souřadnice přesunutého vektoru.



$\boldsymbol{e} = (2;3;2)$

Př. 10: Urči velikost vektoru $\boldsymbol{e}$.

Použijeme Pythagorovu větu:

$|\boldsymbol{e}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

Proč rozkládáme vektory na složky?

x-ové složky všech vektorù jsou spolu rovnoběžné $\Rightarrow$ snadno je můžeme sčítat jako čísla.

Př. 11: Urči vektory:

a) $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ b) $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ c) $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$

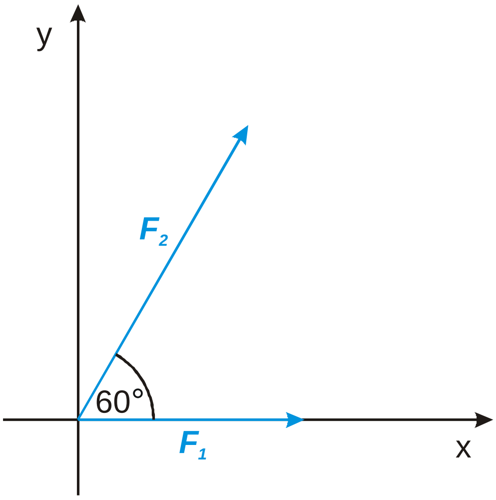
a) $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (4;3;0) + (2;3;3) = (4+2;3+3;0+3) = (6;6;3)$

b) $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = (4;3;0) + (2;-2;4) = (4+2;3-2;0+4) = (6;1;4)$

c) $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = (2;-2;4) - (2;3;3) = (2-2;-2-3;4-3) = (0;-5;1)$

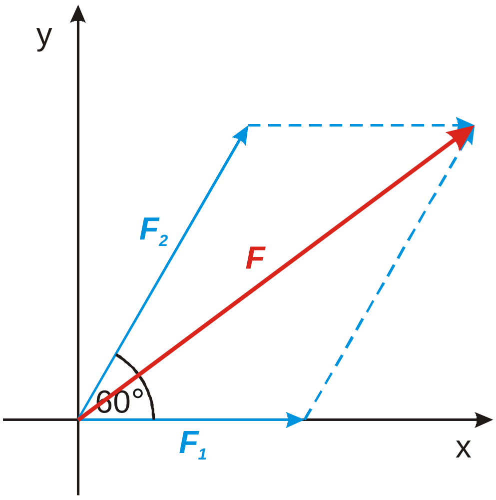
Př. 12: Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ o velikostech $|\boldsymbol{F}_1| = 10\,\mathrm{N}$ a $|\boldsymbol{F}_2| = 15\,\mathrm{N}$ spolu svírají úhel $65°$. Urči velikost jejich výslednice a úhel, který tato síla svírá se silou $\boldsymbol{F}_1$.

Nejdříve musíme určit složky obou vektorů $\Rightarrow$ musíme zvolit soustavu souřadnic, naštěstí můžeme libovolně $\Rightarrow$ zvolíme souřadnice tak, aby osa x měla stejný směr jako síla $\boldsymbol{F}_1$.



Určíme složky vektorů:

- $F_{1x} = 10\,\mathrm{N}$
- $F_{1y} = 0\,\mathrm{N}$
- $\sin\alpha = \dfrac{F_{2y}}{F_2} \Rightarrow F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha = 15 \cdot \sin 60°\,\mathrm{N} \doteq 13\,\mathrm{N}$
- $\cos\alpha = \dfrac{F_{2x}}{F_2} \Rightarrow F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha = 15 \cdot \cos 60°\,\mathrm{N} \doteq 7{,}5\,\mathrm{N}$



Určíme složky vektoru $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$

- $F_x = F_{1x} + F_{2x} = 10 + 7{,}5\,\mathrm{N} = 17{,}5\,\mathrm{N}$
- $F_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + 13\,\mathrm{N} = 13\,\mathrm{N}$

Velikost vektoru $\boldsymbol{F}$: $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{17{,}5^2 + 13^2}\,\mathrm{N} = 21{,}8\,\mathrm{N}$

Úhel, který síla $\boldsymbol{F}$ svírá s osou x: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} \Rightarrow \alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{F_y}{F_x}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{13}{17{,}5}\right) = 36°37'$

Součtem sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ má velikost 21,8 N a se silou $\boldsymbol{F}_1$ svírá úhel $\alpha = 36°37'$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je nutné kontrolovat po krocích (zvolení soustavy, rozklad vektorů, sečtení složek, velikost a úhel výsledného vektoru) a je na něj potřeba minimálně 7 minut.

Shrnutí: Vektory je možné rozkládat na složky v libovolných směrech. Složky ve směru souřadných os jsou u vektorů analogií souřadnic bodu.