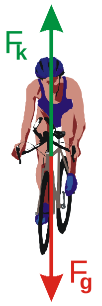
1.3.6 Dynamika pohybu po kružnici II

Pedagogická poznámka: Spočítat všechny uvedené příklady v jedné hodině není reálné.

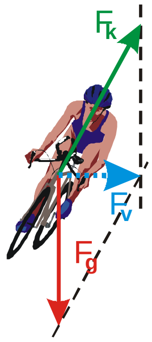
Př. 1: Vysvětli, proč se člověk při jízdě na kole (motocyklu) musí při průjezdu zatáčkou naklonit.

Podobná situace jako u kolotoče:
Na cyklistu působí vždy dvě síly:

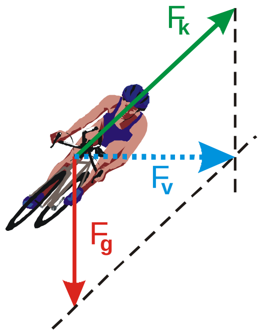
- F_g - gravitační síla Země,
- F_k - tlaková síla kola (působí ve směru kola).



Při svislé jízdě se tyto síly navzájem vyruší. Pokud nepůsobí další síla, pohybuje se cyklista rovnoměrně přímočaře (nebo stojí).



Pokud se cyklista nakloní, síly nemají navzájem opačný směr a objeví se výslednice, směřující dovnitř oblouku.

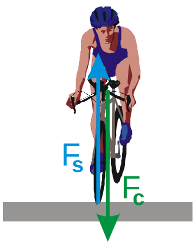


Při větším náklonu je velikost výsledné síly větší.

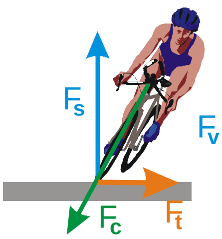
$\Rightarrow$ Cyklista se naklání dovnitř oblouku, aby na něj působila nenulová výsledná síla, která hraje při jeho zatáčení roli dostředivé síly.

Jak je možné, že kolo působí na cyklistu šikmo?
Nakreslíme si novou sadu obrázků, do které dokreslíme síly působící na kolo (trochu si situaci zjednodušíme a budeme zanedbávat hmotnost kola). Ve všech případech na kolo působí dvě síly:

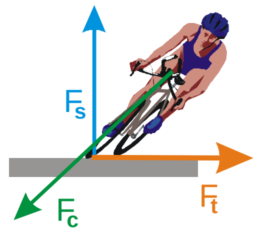
- F_c - tlaková síla od cyklisty (partnerská síla k síle F_k z předchozích obrázků)
- F_s - tlaková síla silnice (působí svisle vzhůru, kolmo na povrch silnice)



Při svislé jízdě se tyto síly navzájem vyruší. Pokud nepůsobí další síla, pohybuje se cyklista rovnoměrně přímočaře (nebo stojí) tímto způsobem může jet cyklista i na ledě.



Pokud se cyklista nakloní, síly nemají navzájem opačný směr a objeví se výslednice $\Rightarrow$ kolo by mělo začít zrychlovat doleva. V tomto pohybu kolu brání třecí síla mezi pneumatikou a silnicí.



Podobná situace jako vlevo, působící třecí síla musí být větší $\Rightarrow$ při tomto náklonu kolo uklouzne (a my spadneme) zřejmě i na normální silnici.

Tímto způsobem nemůžeme jet na ledě (třecí síla je velmi malá).

Př. 2: Na základě zkušeností navrhni veličiny, které určují velikost potřebné dostředivé síly. Navrhni vzorec pro její velikost.

Velikost potřebné dostředivé síly závisí:

- hmotnosti zatáčejícího předmětu (jasné),
- rychlosti zatáčejícího předmětu (při rychlejší jízdě se musíme více naklonit),
- poloměru zatáčky (při menším poloměru se více nakláníme).

$\Rightarrow$ Pro velikost dostředivé síly by mohl platit vzorec $F_d = m\frac{v}{r}$.

Výsledek uvedený v předchozím příkladu je pochopitelný, ale nesprávný.

Velikost dostředivého zrychlení je dána vztahem $F_d = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$.

Př. 3: Najdi vzorec pro velikost normálového zrychlení a_d.

Podle 2. Newtonova zákona platí: $a = \frac{F}{m} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{m} = \frac{v^2}{r}$ $\Rightarrow$ platí: $a_n = \frac{v^2}{r}$.

Př. 4: Jakou maximální rychlostí může projet automobil vodorovnou zatáčkou o poloměru $r = 50\,\mathrm{m}$, je–li koeficient smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou 0,8? Jak se tato rychlost změní, pokud by zatáčka měla poloměr 600 m (minimum požadované pro rychlostní komunikace).

$r_1 = 50\,\mathrm{m}$, $r_2 = 600\,\mathrm{m}$, $f = 0{,}8$, $v_1 = ?$, $v_2 = ?$

Aby se automobil udržel v zatáčce na kruhové dráze, musí existovat dostatečně silná dostředivá síla. Touto silou je tření mezi pneumatikami a vozovkou.

$F_d \le F_t$

$\frac{mv^2}{r} \le fmg$

$v^2 \le fgr$

$v \le \sqrt{fgr}$

$v_1 \le \sqrt{fr_1 g} = \sqrt{0{,}8 \cdot 50 \cdot 10}\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$

$v_2 \le \sqrt{fr_2 g} = \sqrt{0{,}8 \cdot 600 \cdot 10}\,\mathrm{m/s} = 69\,\mathrm{m/s} = 249\,\mathrm{km/h}$

Automobil může projet zatáčku maximální rychlostí $72\,\mathrm{km/h}$. Dálniční zatáčkou by mohl jet rychlostí $249\,\mathrm{km/h}$.

Př. 5: Nádoba naplněná vodou je upevněna na laně a otáčí se na svislém kruhu o poloměru 75 cm. Při které nejmenší rychlosti voda nevyteče?

$r = 75\,\text{cm} = 0,75\,\text{m}$ $\quad g = 10\,\text{m/s}^2$ $\quad v = ?$

Vodu v nádobě musí na kruhové dráze držet dostředivá síla. V nejvyšším bodě dráhy musí tato síla směřovat dolů, a proto její roli může hrát gravitační síla. Velikost dostředivé síly závisí na rychlosti rotujícího tělesa, hledáme tedy takovou rychlost, kdy se potřebná dostředivá síla bude rovnat nebo bude větší než síla gravitační.

$F_d = F_g \qquad F_d = \frac{mv^2}{r} \qquad F_g = m \cdot g$

$\frac{mv^2}{r} = m \cdot g$

$v^2 = rg$

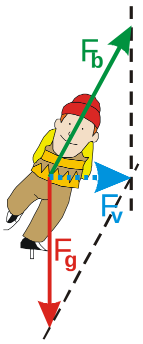
$v = \sqrt{r \cdot g} = \sqrt{0,75 \cdot 10}\,\text{m/s} = 2,7\,\text{m/s}$

Pokud budeme nádobou otáčet alespoň rychlostí 2,7m/s, voda z ní nevyteče.

Př. 6: Bruslař opisuje kruhový oblouk o poloměru 12 m a je odchýlen od svislého směru o úhel 16°40´. Jak velkou rychlostí jede?

$r = 12\,\text{m}$ $\quad \alpha = 16°40'$ $\quad v = ?$

Stejně jako cyklista se bruslař naklání proto, aby vznikla dostředivá síla, která ho udrží v oblouku.



Působící síly F_g, F_b (síla od bruslí) a jejich výslednice F_v tvoří trojúhelník s odvěsnami F_g a F_v. Šikmá síla F_b od bruslí není přímo odporem podložky, ale součtem odporu podložky a třecí síly, která brání uklouznutí bruslí od středu oblouku.

Z trojúhelníku na obrázku $\text{tg}\alpha = \frac{F_d}{F_g} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}$.

$v^2 = \text{tg}\alpha \cdot r \cdot g$

$v = \sqrt{tg\alpha \cdot r \cdot g}$

$v = \sqrt{tg\alpha \cdot r \cdot g} = \sqrt{0,3 \cdot 12 \cdot 10} = 6\,\text{m/s}$

Bruslař projíždí oblouk rychlostí 6 m/s.

Př. 7: Spočti, s jakým zrychlením jsou z prádla odstřeďovány kapky vody ve vaší pračce. Potřebné údaje zjisti nebo změř. (pračka Indesit WS 105 TX: 1000 otáček/min a poloměr vany 22 cm)

$\omega = 1000\,\text{ot/min} = 105\,\text{rad/s}$ $\quad r = 22\,\text{cm} = 0,22\,\text{m}$ $\quad a_n = ?$

Při odstřeďování se prádlo v pračce pohybuje rovnoměrným kruhovým pohybem se značným normálovým zrychlením (právě fakt, že na vodu v prádle nepůsobí dostatečná dostředivá síla, která by byla schopna vodě toto dostředivé zrychlení udělit je příčinou toho, že voda se prádlem přesouvá ke stěně bubnu a připravenými otvory pak z prádla uniká). Pro určení jeho hodnoty potřebujeme znát poloměr bubnu pračky a rychlost (případně úhlovou rychlost) prádla při odstřeďování.

Úhlová rychlost odstřeďování je v otáčkách za minutu uváděna na pračce, velikost bubnu snadno změříme.

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$$

$$a_n = \omega^2 r = 105^2 \cdot 0,22\,\text{m/s}^2 = 2400\,\text{m/s}^2$$

Prádlo je v pračce Indesit odstřeďováno při 1000 otáčkách za minutu ze zrychlením $a = 2400\,\text{m/s}^2$.

Dodatek: Obrovská hodnota výsledku vynikne při porovnání se zrychlením volně padajících předmětů $10\,\text{m/s}^2$.

Př. 8: Kulička o hmotnosti 100 g je upevněna na niti dlouhé 15 cm o pevnosti 10 N. S jakou frekvencí musíš s kuličkou točit ve vodorovném směru na podložce, aby nit praskla?

$m = 100g = 0,1\,\text{kg}$ $\quad r = 15\,\text{cm} = 0,15\,\text{m}$ $\quad F_p = 10\,\text{N}$ $\quad f = ?$

Kulička je položena na podložce, výsledná síla, která na ní působí, je tedy rovna síle, kterou na ní působí provázek (zbývající dvě síly – gravitační a síla podložky se navzájem vyruší). Síla provázku je tedy dostředivou silou působící na kuličku. Ze zvyšující se rychlostí otáčení se zvyšuje potřebná síla dostředivá síla, provázek praskne v okamžiku, kdy tato síla bude větší než jeho pevnost.

$$F_p = F_d = m.\frac{v^2}{r}$$

$$F_p \cdot r = m \cdot v^2 \qquad \text{dosadíme: } v = \omega r$$

$$F_p \cdot r = m \cdot (\omega r)^2$$

$$F_p = m \cdot \omega^2 r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F_p}{mr}} \qquad \text{dosadíme: } \omega = 2\pi f$$

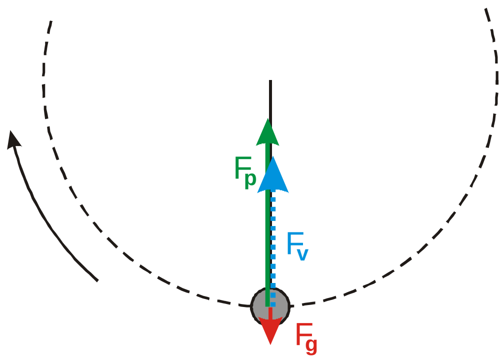
$$2\pi f = \sqrt{\frac{F_p}{mr}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_p}{mr}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_p}{mr}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0,1 \cdot 0,15}} = 4,1\,\text{Hz}$$

Provázek praskne, když se kulička bude otáčet s frekvencí 4,1 Hz.

Př. 9: Kulička o hmotnosti 100 g je upevněna na niti o pevnosti 10 N dlouhé 15 cm. V kterém bodě dráhy nit praskne? S jakou frekvencí musíš s kuličkou točit svislém směru, aby k přetržení nitě došlo? Výsledek nejdříve odhadni (srovnáním s výsledkem předchozího příkladu) a poté urči početně.

$m = 100g = 0{,}1\,\text{kg}$, $r = 15\,\text{cm} = 0{,}15\,\text{m}$, $F_p = 10\,\text{N}$, $f = ?$



Nit praskne v nejnižším bodě dráhy, protože v tomto místě musí síla provázku působící na kuličku vyrovnávat gravitační sílu a ještě působit jako dostředivá síla. Nit praskne ve chvíli, kdy se součet gravitační síly F_g a výsledné dostředivé síly F_d bude rovnat její pevnosti.

Výsledná frekvence bude menší než výsledek příkladu 3 (4,1 Hz), protože kromě dostředivé síly zatěžuje nit také gravitační síla kuličky.

$F_p = F_g + F_d$

$F_p - mg = m\dfrac{v^2}{r}$ dosadíme: $v = \omega r$

$F_p - mg = m\dfrac{(\omega r)^2}{r} = m\omega^2 r$

$\omega^2 = \dfrac{F_p - mg}{mr} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{F_p - mg}{mr}}$ dosadíme: $\omega = 2\pi f$

$2\pi f = \sqrt{\dfrac{F_p - mg}{mr}}$

$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{F_p - mg}{mr}}$

$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{F_p - mg}{mr}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{10 - 0{,}1\cdot 10}{0{,}1\cdot 0{,}15}} = 3{,}9\,\text{Hz}$

Provázek praskne, když se kulička bude otáčet s frekvencí 3,9 Hz.

Dodatek: Výsledný vzorec předchozího příkladu ($f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{F_p - mg}{mr}}$) můžeme srovnat se vzorcem, který jsme získali v příkladu 5: $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{F_p}{mr}}$. Je vidět, že jediným rozdílem je odečtení síly $F_g = mg$ od maximální nosnosti nitě.

Shrnutí: Pro velikost dostředivé síly platí $F_d = m\dfrac{v^2}{r}$.