1.5.7 Zákon zachování mechanické energie II

Předpoklady: 1506

Pedagogická poznámka: U všech tří následujících příkladů se snažím, aby studenti rozlišovali tři fáze řešení: sestavení rovnice pro energetickou bilanci (to je ta nová fyzika, na kterou se musí přijít), dosazení do vzorců případně dopočítání neznámých veličin (spíše otázka paměti než logického uvažování), vyjádření neznámé ze vzorce a dosazení (čistě matematický problém). Na takových příkladech se dá studentům ukázat, že největší problém není v uvažování, ale spíše v paměti nebo matematických dovednostech.

Pedagogická poznámka: Na následující tři příklady je možné věnovat maximálně 20 minut.

Př. 1: Kulka o hmotnosti 8 g dopadne na dřevo rychlostí $500\,\mathrm{m/s}$ a zaryje se do hloubky 8 cm. Urči průměrnou sílu, kterou dřevo brzdilo kulku.

$v_1 = 500\,\mathrm{m/s}$, $m = 8\,\mathrm{g} = 0{,}008\,\mathrm{kg}$, $s = 8\,\mathrm{cm} = 0{,}08\,\mathrm{m}$, $F = ?$

Kinetická energie kulky se během brzdění změnila na práci.

$$E_k = W$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fs$$

$$F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{0{,}008 \cdot 500^2}{2 \cdot 0{,}08}\,\mathrm{N} = 12500\,\mathrm{N}$$

Dřevo brzdí kulku silou 12500 N.

Př. 2: Jak tlusté dřevo by kulku z předchozího příkladu zpomalilo na rychlost 50 m/s?

$v_1 = 500\,\mathrm{m/s}$, $m = 8\,\mathrm{g} = 0{,}008\,\mathrm{kg}$, $v_2 = 50\,\mathrm{m/s}$, $F = 12500\,\mathrm{N}$, $s = ?$

Kinetická energie kulky zmenší o práci, kterou vykoná při prorážení dřeva.

$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k2} = W$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = Fs \quad / \cdot 2$$

$$mv_1^2 - mv_2^2 = 2Fs$$

$$s = \frac{mv_1^2 - mv_2^2}{2F} = \frac{0{,}008 \cdot 500^2 - 0{,}008 \cdot 50^2}{2 \cdot 12500}\,\mathrm{m} = 0{,}079\,\mathrm{m}$$

Na 50 m/s zpomalí kulku 7,9 cm dřeva.

Př. 3: Skokan na lyžích najíždí po doskoku do protisvahu se sklonem 20° počáteční rychlostí $15\,\mathrm{m/s}$. Urči vzdálenost, kterou na protisvahu urazí, než se zastaví. Součinitel tření mezi skluznicemi a sněhem je $0{,}1$.

$v_1 = 15\,\mathrm{m/s}$, $\alpha = 20^\circ$, $f = 0{,}1$, $s = ?$

Na počátku protisvahu má lyžař kinetickou energii, která se postupně mění na potenciální energii (jak vyjíždí výš na protisvahu) a práci při překonávání třecí síly.

$E_{k1} = E_{p2} + W$

- Kinetická energie skokana: $E_k = \frac{1}{2} m v_1^2$
- Potenciální energie skokana: $E = mgh \Rightarrow$ určujeme výšku h pomocí uražené dráhy s. Z pravoúhlého trojúhelníku pomocí goniometrických funkcí: $h = s \sin\alpha \Rightarrow E_p = mgs \sin\alpha$
- Práce vykonaná při překonávání tření: $W = F_t s = Nfs$. Lyžař se pohybuje na nakloněné rovině $\Rightarrow N = mg\cos\alpha \Rightarrow W = Nfs = mg\cos\alpha fs$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgs \sin\alpha + mg\cos\alpha fs$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = gs \sin\alpha + g\cos\alpha fs$$

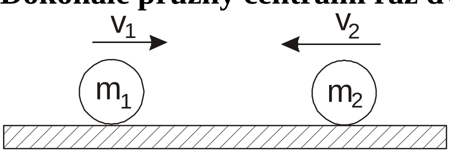
$$\frac{1}{2} v_0^2 = gs\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = gs\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)$$

$$s = \frac{v_0^2}{2g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)} = \frac{15^2}{2 \cdot 10\left(\sin 20° + 0{,}1 \cdot \cos 20°\right)}\,\mathrm{m} = 26\,\mathrm{m}$$

Skokan urazí na protisvahu 26 m.

Dokonale pružný centrální ráz dvou koulí



Situace známá z kulečníku:

- dokonale pružný: při srážce se neztrácí energie,
- centrální ráz: srazí se dvě stejně velké koule tak, že bod dotyku leží na spojnici těžišť (koule se do sebe trefí).

Platí:

- Zákon zachování hybnosti (při srážce hraje roli pouze vzájemné působení koulí): $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$.
- Zákon zachování energie (ráz je dokonale pružný): $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2$.

Máme určit rychlosti koulí po srážce (dvě hodnoty) $\Rightarrow$ potřebujeme soustavu dvou rovnic (už ji máme) $\Rightarrow$ zdánlivě pouze matematický problém. Ale druhá rovnice obsahuje druhé mocniny $\Rightarrow$ zkusíme ji zjednodušit.

Upravíme si druhou rovnici:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2$$

$$m_1 v_1^2 - m_1 w_1^2 = m_2 w_2^2 - m_2 v_2^2$$

$$m_1\left(v_1^2 - w_1^2\right) = m_2\left(w_2^2 - v_2^2\right)$$

Podobně si upravíme i první rovnici:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$$

$$m_1 v_1 - m_1 w_1 = m_2 w_2 - m_2 v_2$$

$$m_1\left(v_1 - w_1\right) = m_2\left(w_2 - v_2\right)$$

$m_1\left(v_1-w_1\right)\left(v_1+w_1\right)=m_2\left(w_2-v_2\right)\left(w_2+v_2\right)$

Nyní možné druhou rovnici vydělit první.

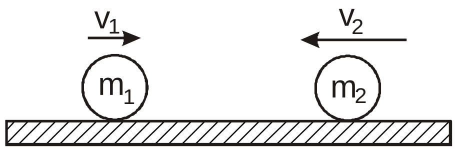
$$\frac{m_1\left(v_1-w_1\right)\left(v_1+w_1\right)=m_2\left(w_2-v_2\right)\left(w_2+v_2\right)}{m_1\left(v_1-w_1\right)=m_2\left(w_2-v_2\right)}\Rightarrow\left(v_1+w_1\right)=\left(w_2+v_2\right)$$

$\left(v_1+w_1\right)=\left(w_2+v_2\right)\Rightarrow v_1-v_2=w_2-w_1$

Dokonale pružný centrální ráz je popsán dvojicí rovnic: $\begin{aligned} m_1v_1+m_2v_2&=m_1w_1+m_2w_2\\ v_1-v_2&=w_2-w_1\end{aligned}$.

Pedagogická poznámka: Odvození většinou pouze promítnu a krátce okomentuji. Nemá smysl, aby si studenti odvození opisovali.

Př. 4: Kuličky se pohybují proti sobě způsobem naznačeným na obrázku. Urči jejich rychlosti po srážce. $m_1=0,5\,\text{kg}$, $m_2=1\,\text{kg}$, $v_1=5\,\text{m/s}$, $v_2=10\,\text{m/s}$.



$m_1v_1+m_2v_2=m_1w_1+m_2w_2\Rightarrow 0,5\cdot 5+1\cdot\left(-10\right)=0,5w_1+w_2$

$v_1-v_2=w_2-w_1\Rightarrow 5-\left(-10\right)=w_2-w_1$

$-7,5=0,5w_1+w_2$

$15=w_2-w_1\Rightarrow w_2=15+w_1$

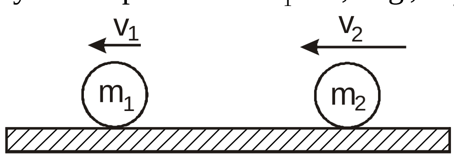
Dosadíme do první rovnice: $-7,5=0,5w_1+\left(15+w_1\right)$.

$-22,5=1,5w_1\Rightarrow w_1=-15\,\text{m/s}$

$w_2=15+w_1=15+\left(-15\right)=0\,\text{m/s}$

Lehčí kulička se odrazí zpátky, těžší se zastaví.

Př. 5: Kuličky se pohybují směrem způsobem naznačeným na obrázku. Urči jejich rychlosti po srážce. $m_1=0,5\,\text{kg}$, $m_2=1\,\text{kg}$, $v_1=5\,\text{m/s}$, $v_2=10\,\text{m/s}$.



$m_1v_1+m_2v_2=m_1w_1+m_2w_2\Rightarrow 0,5\cdot 5+1\cdot 10=0,5w_1+w_2$

$v_1-v_2=w_2-w_1\Rightarrow 5-10=w_2-w_1$

$12,5=0,5w_1+w_2\quad /\cdot 2$

$-5=w_2-w_1\Rightarrow w_2=w_1-5$

Dosadíme do první rovnice: $25=w_1+2w_2=w_1+2\left(w_1-5\right)$.

$25=3w_1-10$

$35=3w_1\Rightarrow w_1=\frac{35}{3}\,\text{m/s}=11,7\,\text{m/s}$

$w_2 = w_1 - 5 = \frac{35}{3} - 5 = \frac{20}{3}\,\text{m/s} = 6{,}7\,\text{m/s}$

Lehčí kulička zrychlí, těžší zpomalí.

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou pro lepší studenty. Většina studentů má dost práce s předchozími, kde se dosazuje.

Př. 6: Odvoď ze soustavy pro dokonale pružný centrální ráz

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$$
$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1$$

vzorec pro výslednou rychlost w_1.

$w_2 = v_1 - v_2 + w_1$

Dosadíme do první rovnice: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 \left(v_1 - v_2 + w_1 \right)$.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 v_1 - m_2 v_2 + m_2 w_1$$
$$m_1 w_1 + m_2 w_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v_1 + m_2 v_2$$
$$w_1 = \frac{2 m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2}$$

Rychlost druhé kuličky bychom mohli spočítat podobně. Ušetříme si však práci následující úvahou. Obě kuličky jsou ve zcela rovnocenné situaci. Kdybychom prohodili jejich označení, musela by rychlost první kuličky (teď ale značené jako druhá) vyjít stejně. Opíšeme tedy vzorec pro první kuličku a prohodíme všechny indexy:

$$w_1 = \frac{2 m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow w_2 = \frac{2 m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_2}{m_1 + m_2}$$

Shrnutí: