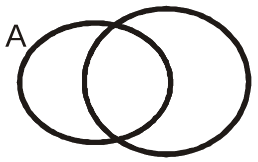
1.3.2 Množinové operace

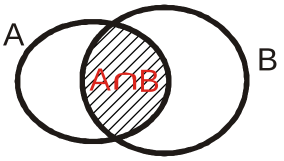
Předpoklady: 1301

Průnik množin ($\cap$)
Průnik množin A, B (zapisujeme $A \cap B$) je množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin.

Kteří studenti patří do průniku množiny všech jedničkářů s množinou všech kluků?
Kluci, kteří jsou jedničkáři. Splňují obě podmínky, patří do obou množin.

Př. 1: V obrázku množin A a B vyšrafuj množinu $A \cap B$.





Poznámka: V průniku $A \cap B$ je toho „málo“, proto je značka stříška, pod ní málo naprší.

Pokud platí $A \cap B = \emptyset$ říkáme, že A,B jsou disjunktní

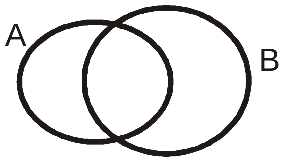
Př. 2: Najdi příklady disjunktních množin, jejichž prvky jsou studenti třídy.

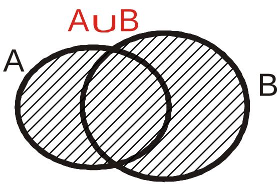
Příkladů je mnoho:
množina kluků a množina holek
množina učitel a množina studentů přítomných ve třídě

Pedagogická poznámka: Můžeme se zeptat taky na případy množin, které nejsou navzájem disjunktní.

Sjednocení množin ($\cup$)
Sjednocení množin A, B (zapisujeme $A \cup B$) je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B.

Př. 3: V obrázku množin *A* a *B* vyšrafuj množinu $A \cup B$.





Poznámka: Ve sjednocení $A \cup B$ je toho „hodně“, proto je značka vanička, do ní hodně naprší.

Př. 4: Najdi dvě množiny jejichž sjednocením vznikne množina všech studentů třídy.

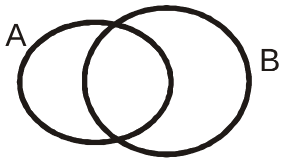
Opět mnoho možností:
množina kluků a množina holek
množina místních a množina dojíždějících

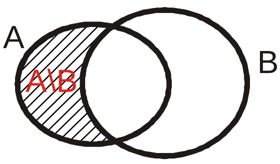
Př. 5: Jaký je vztah mezi množinami *A* a *B*, pokud platí $A \cup B = A$.

Pokud platí: $A \cup B = A$ znamená to, že všechny prvky množiny *B* jsou v množině *A* $\Rightarrow$ $B \subset A$.

Rozdíl množin A , B ($A \setminus B$)
je množina všech prvků *A* , které nejsou prvky množiny *B*.

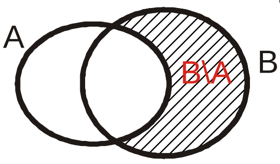
Př. 6: V obrázku množin *A* a *B* vyšrafuj množinu $A \setminus B$.





Př. 7: Kromě rozdílu množin $A \setminus B$**,** je možné vytvořit také rozdíl $B \setminus A$**.** Zformuluj jeho definici a nakresli ilustrační obrázek.

Rozdíl množin $B \setminus A$ je množina všech prvků množiny *B*, které nejsou prvky množiny *A*.



Př. 8: U každé z následujících dvojici množin urči $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ a $B \setminus A$:

a) $A = \left\{1, 2, \pi, \sqrt{8}\right\}$, $B = \{1, 3, \pi, 17\}$

b) $A = \{x \in \mathrm{N}; x > 3\}$, $B = \{x \in \mathrm{N}; x \leq 7\}$

c) $A = \{x \in \mathrm{Z}; x > -3\}$, $B = \{x \in \mathrm{Z}; x > -5,2\}$

d) $A = \{x \in \mathrm{Z}; x < 0\}$, $B = \left\{x \in \mathrm{Z}; \sqrt{x^2} = x\right\}$

e) $A = Z$, $B = N$

a) $A = \left\{1, 2, \pi, \sqrt{8}\right\}$ $B = \{1, 3, \pi, 17\}$

$A \cap B = \{1, \pi\}$

$A \cup B = \left\{1, 2, 3, \pi, \sqrt{8}, 17\right\}$,

$A \setminus B = \left\{2, \sqrt{8}\right\}$ $B \setminus A = \{3, 17\}$

b) $A = \{x \in \mathrm{N}; x > 3\}$ $A = \{4, 5, ...\}$ $B = \{x \in \mathrm{N}; x \leq 7\}$ $B = \{1, 2....6, 7\}$

$A \cap B = \{\ 4, 5, 6, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, ...\} = N$

$A \setminus B = \{x \in N, x > 7\}$ $B \setminus A = \{x \in N; x < 3\} = \{1, 2\}$

c) $A = \{x \in \mathrm{Z}; x > -3\}$ $A = \{-2, -1, 0, ...\}$

$B = \{x \in \mathrm{Z}; x > -5,2\}$ $B = \{-5, -4, -3, ...\}$

$A \cap B = \{-2, -1, 0, ...\} = \{x \in \mathrm{Z}; x > -3\}$

$A \cup B = \{-5, -4, -3, ...\} = \{x \in \mathrm{Z}; x \geq -5\}$

$A \setminus B = \emptyset$ $B \setminus A = \{-5; -4, -3\}$

d) $A = \{x \in \mathrm{Z}; x < 0\}$ $A = \{-1, -2, -3...\}$

$B = \left\{x \in \mathrm{Z}; \sqrt{x^2} = x\right\}$ $B = \{0, 1, 2, ...\}$

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \mathrm{Z}$

$A \setminus B = \{x \in \mathrm{Z}; x < 0\}$ $B \setminus A = Z_0^+$

e) $A = Z$

$B = N$

$A \cap B = N$

$A \cup B = \mathrm{Z}$

$A \setminus B = Z_0^-$ $B \setminus A = \emptyset$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je poměrně dlouhý. Pokud zbývá málo času, není nutné řešit všechny body.

Určování počtu prvků
U konečné množiny počet prvků spočítáme bez problému.

Problém: Jak určit počet prvků u nekonečných množin?
Řešení (částečné): pospojuji prvky množiny A s prvky množiny B vzájemně jednoznačně (Každý prvek A má právě jeden prvek množiny B a obráceně. Analogie vytváření párů při tanci. V každé dvojici je právě jeden kluk a právě jedna holka).
Pokud ani v jedné množině nezůstane žádný prvek bez partnera z druhé množiny, je počet prvků v obou množinách stejný.
(Jakmile na tanečních proběhne volenka a utvoří se páry, hned vidíme, jestli bylo stejně kluků a holek.)
Tak budu moci porovnávat nekonečné množiny mezi sebou.

Př. 9: Porovnej počet přirozených a sudých přirozených čísel.

Na první pohled to vypadá, že přirozených je dvakrát víc (polovina čísel u sudých chybí).
Omyl.

přirozená čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

sudá čísla: 2, 4, 6, 8, 10, ...

Žádné číslo nezbylo na ocet $\Rightarrow$ sudých čísel je stejný počet jako čísel přirozených.

Může za to nekonečno:

- nekonečně není nějaké obyčejné jen největší číslo, ale je to něco úplně jiného
- řada přirozených čísel nemá poslední člen, za každým číslem bezprostředně následuje další o jedno větší

$\Rightarrow$ pokud chceme přemýšlet o nekonečnu musíme být opatrní a vzdát se některých představ souvisejících s konečnými čísly.

Hilbertův hotel
Je hotel s nekonečně mnoho jednolůžkovými pokoji. Pokoje jsou očíslovány přirozenými čísly. Hotel je plně obsazen, v každém je jeden host. Na recepci se dostaví tři turisté a chtějí se také ubytovat. Je možné jim poskytnout ubytování aniž bychom někoho z ubytovaných vystěhovali pryč z hotelu?
Ano, všichni z ubytovaných opustí svůj pokoj a nastěhují se do pokoje s číslem o 3 větším $\Rightarrow$ pokoje 1, 2, 3 jsou volné a je možné do nich ubytovat další zájemce.
Stejným způsobem je možné ubytovat každý konečný počet turistů.

Pedagogická poznámka: Diskuse o Hibertově hotelu studenty baví. Občas se najdou takoví, kteří dokonce přijdou sami na to, jak do plně obsazeného hotelu ubytovat dalšího turistu.

Je možné v obsazeném hotelu ubytovat nekonečně mnoho turistů?

Stačí, aby se všichni přestěhovali na pokoj jeho číslo je dvakrát větší. Všechny liché pokoje zůstanou volné.

$\Rightarrow$ když k nekonečnu přičtu konečné číslo, nekonečno se nezmění

$\Rightarrow$ když půjdu po nekonečné přímce, v jakékoliv vzdálenosti od počátku budu od cíle pořád stejně daleko, pořád mi bude scházet nekonečně velká vzdálenost

Př. 10: Petáková:
strana 11/cvičení 17
strana 11/cvičení 18

Shrnutí: Nekonečno není obyčejné poslední číslo na konci řady přirozených čísel.