1.4.4 Negace složených výroků

Předpoklady: 1401, 1402, 1403

Negace konjunkce:

Př. 1: Doplň následující tabulku pravdivostních hodnot výroků:

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1

Hledáme jiný způsob, jak napsat negaci konjunkce. Zápis $\neg(a \wedge b)$ znamená pouze přidání záporu před původní výrok.

Pravdivostní hodnoty hledaného výroku známe (čtvrtý sloupec je negací třetího).
Sloupek negací má tři 1 a jednu 0 $\Rightarrow$ nemůže to být konjunkce (poměr 1 a 0 má obrácený) $\Rightarrow$ musí to být disjunkce (nebo implikace) nějakých výroků (tyto výroky mají má tři 1 a jednu 0) $\Rightarrow$ zkusím disjunkci $(\ ) \vee (\ )$
Hledám co dosadit do závorek $\Rightarrow$ První řádek: disjunkce $(\ ) \vee (\ )$ je nepravdivá $\Rightarrow$ musím ji složit ze dvou nepravdivých výroků (platí $0 \vee 0 = 0$) $\Rightarrow$ výroky *a* i *b* jsou pravdivé $\Rightarrow$ místo nich použiji jejich negace (abych měl dvě 0).
Zřejmě platí, že negací výroku $a \wedge b$ je výrok $\neg a \vee \neg b$

Př. 2: Doplň předchozí tabulku o sloupec pro výrok $\neg a \vee \neg b$ a porovnáním se sloupcem pro výrok $\neg(a \wedge b)$ ověř, že je negací výroku $a \wedge b$.

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Hypotéze se potvrdila $\Rightarrow$
Negací výroku $a \wedge b$ **je výrok** $\neg a \vee \neg b$

Logické: původní výrok vyžaduje splnit obě podmínky, když poruším jednu **nebo** druhou, je výrok nepravdivý.

Př. 3: Zneguj výrok: „Dnes je pondělí 17. 10. 2005.“.

Dva výroky:
a: Dnes je pondělí.
b: Dnes je 17.10. 2005.
Výrok má tvar $a \wedge b$, zneguji na $\neg a \vee \neg b$.
Dnes není pondělí nebo není 17.10.2005.

Př. 4: Zneguj výrok:
a) „Číslo dělitelné šesti je dělitelné třemi a dvěma“.
b) „Ideální manžel myje nádobí a nechrápe.“
c) „Kočka leze dírou, pes oknem.“

a)
Dva výroky:
a: Číslo dělitelné šesti je dělitelné třemi.
b: Číslo dělitelné šesti je dělitelné dvěma.
Výrok má tvar $a \wedge b$, zneguji na $\neg a \vee \neg b$.
Číslo dělitelné šesti není dělitelné třemi nebo dvěma.
b)
Dva výroky:
a: Ideální manžel myje nádobí.
b: Ideální manžel nechrápe.
Výrok má tvar $a \wedge b$, zneguji na $\neg a \vee \neg b$.
Ideální manžel nemyje nádobí nebo chrápe.
c)
Dva výroky:
a: Kočka leze dírou.
b: Pes leze oknem.
Výrok má tvar $a \wedge b$, zneguji na $\neg a \vee \neg b$.
Kočka neleze dírou nebo pes neleze oknem.

Negace disjunkce:

Př. 5: Doplň následující tabulku pravdivostních hodnot výroků:

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1

Hledáme jiný způsob, jak napsat negaci disjunkce. Zápis $\neg(a \vee b)$ znamená pouze přidání záporu před původní výrok.

Pravdivostní hodnoty hledaného výroku známe (čtvrtý sloupec je negací třetího).
Sloupek negací má tři 0 a jednu 1 $\Rightarrow$ nemůže to být disjunkce (poměr 1 a 0 má obrácený) $\Rightarrow$ musí to být konjunkce nějakých výroků (tento výrok má tři 0 a jednu 1) $\Rightarrow$ zkusím konjunkci $(\ )\wedge(\ )$
Hledám co dosadit do závorek $\Rightarrow$ Čtvrtý řádek: konjunkce $(\ )\wedge(\ )$ je pravdivá $\Rightarrow$ musím ji složit ze dvou pravdivých výroků (platí $1 \wedge 1 = 1$) $\Rightarrow$ výroky *a* i *b* jsou nepravdivé $\Rightarrow$ místo nich použiji jejich negace (abych měl dvě 1).
Zřejmě platí, že negací výroku $a \wedge b$ je výrok $\neg a \wedge \neg b$

Př. 6: Doplň předchozí tabulku o sloupec pro výrok $\neg a \wedge \neg b$ a porovnáním se sloupcem pro výrok $\neg(a \vee b)$ ověř, že je negací výroku $a \vee b$.

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Negací výroku $a \vee b$ je výrok $\neg a \wedge \neg b$

Logické: K pravdivosti původního výroku stačí splnit jednu nebo druhou podmínku, jedině když poruším první **a zároveň** druhou podmínku, je výrok nepravdivý.

Př. 7: Neguj výrok: „Pro velikost úhlu platí $|\sphericalangle AVB| = 90°$ nebo bod *V* neleží na kružnici *k*.“

Dva výroky:
a: Pro velikost úhlu platí $|\sphericalangle AVB| = 90°$.
b: bod *V* neleží na kružnici *k*.
Výrok má tvar $a \vee b$, zneguji na $\neg a \wedge \neg b$.
Pro velikost úhlu neplatí $|\sphericalangle AVB| = 90°$ a bod *V* leží na kružnici *k*.

Př. 8: Neguj výrok:
a) „Nezáporné číslo je buď nula nebo číslo kladné.“
b) „Dneska půjdu odpoledne ven, nebo se budu učit.“
c) „Peníze nebo život.“

a)
Dva výroky:
a: Nezáporné číslo je nula.
b: Nezáporné číslo je číslo kladné.
Výrok má tvar $a \vee b$, zneguji na $\neg a \wedge \neg b$.
Nezáporné číslo není ani nula ani číslo kladné.
b)
Dva výroky:
a: Dneska půjdu odpoledne ven.
b: Dneska se budu odpoledne učit.
Výrok má tvar $a \vee b$, zneguji na $\neg a \wedge \neg b$.
Dneska odpoledne nepůjdu ven a nebudu se učit.
c)
Dva výroky:
a: Peníze.
b: Život.
Výrok má tvar $a \vee b$, zneguji na $\neg a \wedge \neg b$.
Ani peníze, ani život.

Negace implikace

Př. 9: Doplň následující tabulku pravdivostních hodnot výroků:

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1

Hledáme jiný způsob, jak napsat negaci implikace. Zápis $\neg(a \Rightarrow b)$ znamená pouze přidání záporu před původní výrok.

Pravdivostní hodnoty hledaného výroku známe (čtvrtý sloupec je negací třetího).
Sloupek negací má tři 0 a jednu 1 $\Rightarrow$ nemůže to být implikace (poměr 1 a 0 má obrácený) $\Rightarrow$ musí to být konjunkce nějakých výroků (tento výrok má tři 0 a jednu 1) $\Rightarrow$ zkusím konjunkci $(\quad) \wedge (\quad)$

Hledám co dosadit do závorek $\Rightarrow$ Druhý řádek: konjunkce $(\ )\wedge(\ )$ je pravdivá $\Rightarrow$ musím ji složit ze dvou pravdivých výroků (platí $1\wedge1=1$) $\Rightarrow$ výroky *a* je pravdivý, výrok *b* je nepravdivý $\Rightarrow$ místo *b* použiji jeho negaci, výrok *a* nechám (abych měl dvě 1).
Zřejmě platí, že negací výroku $a \Rightarrow b$ je výrok $a \wedge \neg b$.

Př. 10: Doplň předchozí tabulku o sloupec pro výrok $a \wedge \neg b$ a porovnáním se sloupcem pro výrok $\neg(a \Rightarrow b)$ ověř, že je negací výroku $a \Rightarrow b$.

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge \neg b$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0

Negací výroku $a \Rightarrow b$ je výrok $a \wedge \neg b$
Logické: implikace je nepravdivá pouze když z pravdy plyne nepravda. Při negaci musí nastat právě tato situace – výrok *a* je pravdivý a výrok *b* nepravdivý.

Pedagogická poznámka: Negování implikací je vynikajícím příkladem při nacvičování dodržování pravidel. Naprostá většina studentů totiž implikace intuitivně neguje špatně (buď špatně sestavuje výrok nebo přidává předložku jestli).
Problémy vznikají ze dvou různých důvodů:
Část studentů vůbec není schopna dodržovat pravidla. Ačkoliv mají pravidlo na negování napsané před očima, přesto při tvorbě negace postupují zcela bez ohledu na pravidlo čistě intuitivně a se špatným výsledkem. U nich je nutné, aby byli donuceni postupovat opravdu podle pravidla. Pokud se to nenaučí ihned budou bez používání pravidel postupovat i dále.
Druhá část studentů sice podle pravidel postupovat dokáže, ale odmítá si je pamatovat. U nich stačí jen tlačit na to, aby poznali, že se bez nich neobejdou.

Př. 11: Neguj výrok: „Jestliže pro strany trojúhelníka platí vzorec $c^2 = a^2 + b^2$, trojúhelník je pravoúhlý.“

Dva výroky:
a: Pro strany trojúhelníka platí vzorec $c^2 = a^2 + b^2$.
b: trojúhelník je pravoúhlý.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, zneguji na $a \wedge \neg b$.
Pro strany trojúhelníka platí vzorec $c^2 = a^2 + b^2$ a trojúhelník není pravoúhlý.

Př. 12: Neguj výrok:
a) „Je-li číslo dělitelné devíti, pak je dělitelné i třemi“.
b) „Jestliže se nebudeš učit, dostaneš pětku.“
c) „Jestli bude ráno pršet, nepojedu na kole.“
d) „Nebude-li pršet, nezmoknem.“

a)
Dva výroky:

a: Číslo je dělitelné devíti.
b: Číslo je dělitelné třemi.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, zneguji na $a \wedge \neg b$.
Číslo je dělitelné devíti a není dělitelné třemi.
b)
Dva výroky:
a: Nebudeš se učit.
b: Dostaneš pětku
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, zneguji na $a \wedge \neg b$.
Nebudeš se učit a nedostaneš pětku.
c)
Dva výroky:
a: Ráno bude pršet.
b: Nepojedu na kole.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, zneguji na $a \wedge \neg b$.
Ráno bude pršet a pojedu na kole.
d)
Dva výroky:
a: Nebude pršet.
b: Nezmoknem.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, zneguji na $a \wedge \neg b$.
Nebude pršet a zmokneme.

Pedagogická poznámka: Zbývající část hodiny je podle mých zkušeností nestihnutelná. Řeším to tak, že zjištění negací pro ekvivalenci nechávám na studentech v rámci cvičení.
Při posledním průchodu jsem díky tomu objevil zajímavé skutečnosti:
Asi polovina studentů při odvozování negace ekvivalence nepoužívala tabulku s výroky a, b a $a \Leftrightarrow b$, ale opsala celou tabulku z hodiny 1403, kde se ekvivalence odvozována jako výrok $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$. Jinými slovy, polovina studentů si vůbec nevšimla, že jsme pomocí výroku $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ něco odvodili a tento výrok jsme dál používali jako jeden ze základních složených výroků, který má svou ze svého významu dobře zdůvodnitelnou tabulku pravdivostních hodnot. Prostě jenom opsali ze sešitu látku, která pro ně neměla žádný další význam.
Druhý zajímavý efekt se týkal výsledku negace ekvivalence. Výsledkem jsou dva z hlediska správnosti zcela ekvivalentní výroky $\neg a \Leftrightarrow b$ a $a \Leftrightarrow \neg b$. Kvůli tomu jsme při procvičování na příkladech měli vždy dvě výsledné negace. Po procvičení negace ekvivalence se studenti vrátili k počítání sbírky a poměrně rychle se u negací normálních neekvivalentních výroků objevil dotaz, jak je ta druhá verze. Teprve po chvíli mi došlo, že studenti předpokládají, že stejně jako u ekvivalencí i u všech ostatních negací musí existovat dvě řešení. To opět ukazuje na to, že při výuce si nikdo z tazatelů neuvědomil, že jsme se zaobírali speciálním případem negace a naše výsledky tak nemohou být přenositelné na vytváření negací obecně.

Negace ekvivalence

Př. 13: Doplň následující tabulku pravdivostních hodnot výroků:

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$\neg(a \Leftrightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$\neg(a \Leftrightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1

Hledáme jiný způsob, jak napsat negaci ekvivalence. Zápis $\neg(a \Leftrightarrow b)$ znamená pouze přidání záporu před původní výrok.

Pravdivostní hodnoty hledaného výroku známe (čtvrtý sloupec je negací třetího).
Sloupek negací má dvě 1 a dvě 0 $\Rightarrow$ negace musí být opět ekvivalencí postavenou na výrocích a a b
Ekvivalence je pravdivá, když oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu. Její negace je pravdivá, když se pravdivosti původních výroků budou lišit. Stačí jeden z nich znegovat, máme tedy dvě možnosti: $a \Leftrightarrow \neg b$ a $\neg a \Leftrightarrow b$.

Př. 14: Doplň předchozí tabulku o sloupce pro výroky $a \Leftrightarrow \neg b$ a $\neg a \Leftrightarrow b$ a porovnáním se sloupcem pro výrok $\neg(a \Leftrightarrow b)$ ověř, že jsou negací výroku $a \Leftrightarrow b$.

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$\neg a \Leftrightarrow b$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg(a \Leftrightarrow b)$	$a \Leftrightarrow \neg b$
1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0

Negací výroku $a \Leftrightarrow b$ jsou výroky $a \Leftrightarrow \neg b$ nebo $\neg a \Leftrightarrow b$.
Logické: Ekvivalence je pravdivá, když jsou výroky stejné, negace, když jsou různé.

Př. 15: Neguj výrok: „Číslo 2 je větší než 0, právě když je kladné.“

Dva výroky:
a: Číslo 2 je větší než 0.
b: Číslo 2 je kladné.
Výrok má tvar $a \Leftrightarrow b$, zneguji na $a \Leftrightarrow \neg b$ nebo $\neg a \Leftrightarrow b$.

$a \Leftrightarrow \neg b$: Číslo 2 je větší než 0, právě když není kladné.
$\neg a \Leftrightarrow b$: Číslo 2 je menší nebo rovno 0, právě když je kladné.

Př. 16: Neguj výrok:
a) „Číslo 158 je dělitelné 6, právě když je dělitelné 2 a 3.“
b) „Přišel jsem, viděl jsem, zvítězil jsem.“
c) „Já to platit nebudu, radši se dám na vojnu.“
d) „Bude-li každý z nás z křemene, bude celý národ z kvádru.“

a)
Tři výroky:
a: Číslo 158 je dělitelné 6
b: Číslo 158 je dělitelné 2
c: Číslo 158 je dělitelné 3
Výrok má tvar $a \Leftrightarrow (b \wedge c)$, zneguji na $\neg a \Leftrightarrow (b \wedge c)$ nebo $a \Leftrightarrow \neg(b \wedge c)$. V druhé možnosti musím ještě vyrobit negaci závorky (jde o negaci konjunkce) $a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c)$.
$\neg a \Leftrightarrow (b \wedge c)$: Číslo 158 není dělitelné 6, právě když je dělitelné 2 a 3.
$a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c)$: Číslo 158 je dělitelné 6, právě když není dělitelné 2 nebo 3.
b)
Tři výroky:
a: Přišel jsem.
b: Viděl jsem.
c: Zvítězil jsem.
Výrok má tvar $a \wedge b \wedge c$, zneguji na $\neg a \vee \neg b \vee \neg c$.
Nepřišel jsem nebo jsem neviděl nebo jsem nezvítězil.
c)
Dva výroky:
a: Já to platit nebudu.
b: Radši se dám na vojnu.
Výrok má tvar $a \wedge b$, zneguji na $\neg a \vee \neg b$.
Zaplatím to nebo se nedám na vojnu.
d)
Dva výroky:
a: Každý z nás bude z křemene.
b: Celý národ bude z kvádru.
Výrok má tvar $a \Rightarrow b$, zneguji na $a \wedge \neg b$.
Každý z nás bude z křemene a celý národ nebude z kvádru.

Př. 17: Petáková:
strana 11/cvičení 10
strana 11/cvičení 11

Shrnutí: Při hledání negací musíme nejdříve určit druh výroku (z počtu jedniček a nul) a pak teprve jeho konkrétní tvar.