1.5.2 Násobek a dělitel čísla

Předpoklady: 1501

Poznámka: Až do konce kapitoly budeme uvažovat pouze přirozená čísla.

Platí: $45 = 5 \cdot 9$ nebo $45 = 9 \cdot 5$
Mohu to vyjádřit slovně:
45 je násobkem 5. 5 je dělitel 45.
45 je násobkem 9. 9 je dělitel 45.

Číslo a je násobkem čísla b (číslo b je dělitel čísla a) právě tehdy, když existuje přirozené číslo k takové,že $a = k \cdot b$.

Píše se také: b/a Znamená: b dělí a
konkrétně: $5/30$ Znamená: 5 dělí 30

Soudělná čísla mají společného dělitele většího než 1.
Nesoudělná čísla mají jediného společného dělitele - číslo 1.

Přirozená čísla můžeme zapisovat pomocí násobků jiných přirozených čísel:

Číslo	Pomocí násobku 2	Pomocí násobku 3	Pomocí násobku 4
1	$2\cdot0+1$	$3\cdot0+1$	$4\cdot0+1$
2	$2\cdot1+0$	$3\cdot0+2$	$4\cdot0+2$
3	$2\cdot1+1$	$3\cdot1+0$	$4\cdot0+3$
4	$2\cdot2+0$	$3\cdot1+1$	$4\cdot1+0$
5	$2\cdot2+1$	$3\cdot1+2$	$4\cdot1+1$
6	$2\cdot3+0$	$3\cdot2+0$	$4\cdot1+2$
13	$2\cdot6+1$	$3\cdot4+1$	$4\cdot3+1$
…	…	…	…

Do tabulky bych mohl napsat i další přirozená čísla.

Všechny přirozené čísla můžeme rozdělit do 2 skupin podle zbytku po dělení 2
- zbytek 0 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $2k + 0 = 2k$ (jde o sudá čísla)
- zbytek 1 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $2k + 1$ (jde o lichá čísla)

Podobně pro 3 (ale tři skupiny):
- zbytek 0 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $3k + 0 = 3k$
- zbytek 1 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $3k + 1$
- zbytek 2 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $3k + 2$

Pro 4 jsou čtyři skupiny: $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$

Pedagogická poznámka: Nechávám studenty opsat tabulku a pak je vyzvu, aby si prohlédli druhý sloupec pomocí násobku čísel 2. Sami přijdou na to, že se stále opakují pouze dva zbytky a je tedy možné rozdělit čísla do dvou skupin. Rozdělení podle zbytkových tříd 3 a čtyř pak udělají úplně sami.

Př. 1: Rozděl přirozená čísla do skupin podle zbytků po dělení šesti.

Při dělení šesti můžeme získat šest různých hodnot zbytku 0 až 5 $\Rightarrow$ skupiny $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$

Obecně:
Každé přirozené číslo *n* lze pomocí přirozeného čísla $b>1$ vyjádřit jedním z výrazů: $bk, bk+1, bk+2, ..., bk+(b-1)$, kde $k \in \mathbb{N}_0$.
(stručnější zápis $n = bk + z$, kde $z \in \{0,1,...,b-1\}$.

Př. 2: Platí $13 = 2 \cdot 6 + 1$. Které z konkrétních čísel uvedených v předchozí rovnosti odpovídá jednotlivým písmenům z předchozí věty (*n*, *b*, *k*, *z*)?

13 je číslo, které rozkládáme na součin $\Rightarrow$ písmeno *n*
2 je jedno z čísel v součinu $\Rightarrow$ písmeno *k* nebo *b*
6 je jedno z čísel v součinu $\Rightarrow$ písmeno *k* nebo *b*
1 je zbytek po dělení $\Rightarrow$ písmeno *z*

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není zbytečný. Studenti mají často tendenci zcela ignorovat jakákoliv obecná tvrzení.

Důkazy o dělitelnosti

Př. 3: Je dán součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel - $n(n+1)$. Rozhodni zda je nebo není dělitelný 2.

Součin je určitě dělitelný 2, alespoň jedno z čísel v součinu je sudé a pak je určitě sudý celý součin.

Příklad můžeme řešit i podrobněji:
Čísla je možné zapsat dvěma způsoby například takto:

- $n = 2k$, $n+1 = 2k+1$ (první je sudé, druhé liché)
  potom $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2 \cdot k(2k+1)$ - dělitelné dvěma
- $n = 2k+1$, $n+1 = 2k+2$ (první je liché, druhé sudé)
  potom $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2 \cdot (2k+1)(k+1)$ - dělitelné dvěma

Př. 4: Rozhodni, zda je součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel určitě dělitelný čísly 2, 3 a 4.

Stejná úvaha jako v předchozím případě.
Tři po sobě jdoucí čísla $\Rightarrow$

- minimálně jedno je dělitelné dvěma $\Rightarrow$ součin je dělitelný dvěma
- minimálně jedno je dělitelné třemi $\Rightarrow$ součin je dělitelný třemi
- ani jedno nemusí být dělitelné čtyřmi a nemusí být dvě z nich dělitelné dvěma $\Rightarrow$ součin nemusí být dělitelný čtyřmi

Př. 5: Zobecni výsledky dvou předchozích příkladů.

Zobecnění: Součin *n* po sobě jdoucích přirozených čísel je určitě dělitelný číslem *n*.

Př. 6: Zjisti jakým největším přirozeným číslem je určitě dělitelný součin čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel.

Máme součin $n(n+1)(n+2)(n+3)$

Minimálně jedno z čísel je dělitelné 4, minimálně jedno je dělitelné 3, a minimálně jedno je dělitelné 2 a není dělitelné 4 (dělitelné dvěma jsou dvě z čísel, jedno pouze dvěma druhé i čtyřmi).

Součin je najednou dělitelný čísly 2, 3 a 4 $\Rightarrow$ největší dělitel je číslo $2\cdot 3\cdot 4=24$

Př. 7: Dokaž, že pro každé přirozené číslo *n* platí: $6/n^3-n$.

Zkusím $n=2$, $n^3-n=2^3-2=8-2=6$ - je dělitelné 6, ale tento pokus rozhodně není důkaz.

Rozložím na součin $n^3-n=n\left(n^2-1\right)=n(n-1)\cdot(n+1)=(n-1)n(n+1)$ - tři po sobě jdoucí čísla $\Rightarrow$ alespoň jedno dělitelné dvěma, alespoň jedno je dělitelné třemi. Číslo n^3-n je dělitelné 2 a 3, tedy je dělitelné 6.

Př. 8: Dokaž, že pro každé přirozené číslo *n* platí: $3/n^3+2n$.

Zkusím, $n=3$, $n^3+2n=3^3+2\cdot 3=33$ - je dělitelné 3, ale není to důkaz

Rozložím na součin $n^3+2n=n\left(n^2+2\right)$

Součin nestačí, všechna přirozená čísla zkoušet nemůžeme $\Rightarrow$ vyzkoušíme všechny přirozená čísla pomocí skupin podle dělitelnosti 3 (jsou jenom tři):

$n=3k$:

$n\left(n^2+2\right)=3k\left((3k)^2+2\right)=3k\left(9k^2+2\right)$

$n=3k+1$**:**

$n\left(n^2+2\right)=(3k+1)\left((3k+1)^2+2\right)=(3k+1)\left(9k^2+6k+1+2\right)=(3k+1)3\left(3k^2+2k+1\right)$

$n=3k+2$:

$n\left(n^2+2\right)=(3k+2)\left((3k+2)^2+2\right)=(3k+2)\left(9k^2+12k+4+2\right)=(3k+2)3\left(3k^2+4k+2\right)$

jiná možnost není $\Rightarrow$ **!!!!Tak jsme to dokázali!!!!**

Pedagogická poznámka: Pokud se Vám nepodaří dostat se až na konec hodiny není to nic divného. Třeba upravování výrazů v příkladech 8 a 9 jde studentům dost pomalu. Zbytek hodiny je možné přesunout do cvičení nebo se ho prostě vzdát.

Př. 9: Dokaž, že pro každé přirozené číslo *n* platí: $3/n^3-4n$.

Zkusím, $n=3$, $n^3-4n=3^3-4\cdot 3=15$ - je dělitelné 3, ale není to důkaz

Rozložím na součin $n^3-4n=n\left(n^2-4\right)$

Součin nestačí, všechna přirozená čísla zkoušet nemůžeme $\Rightarrow$ vyzkoušíme všechny přirozená čísla pomocí skupin podle dělitelnosti 3 (jsou jenom tři):

$n = 3k$:

$n(n^2-4) = 3k\left((3k)^2-4\right) = 3k(9k^2-4)$

$n = 3k+1$**:**

$n(n^2-4) = (3k+1)\left((3k+1)^2-4\right) = (3k+1)(9k^2+6k+1-4) = (3k+1)3(3k^2+2k-1)$

$n = 3k+2$:

$n(n^2-4) = (3k+2)\left((3k+2)^2-4\right) = (3k+2)(9k^2+12k+4-4) = (3k+2)3(3k^2+4k)$

jiná možnost není $\Rightarrow$!!!!Tak jsme to dokázali!!!!

Př. 10: Zjistěte, zda platí součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi.

Zkusím: $1+2+3=6$ - dělitelné třemi, ale není to důkaz
Označím čísla $\Rightarrow$ n, $n+1$, $n+2$
$n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$ $\Rightarrow$ číslo je dělitelné třemi

Př. 11: Zjistěte, zda součet čtyř po sobě jdoucích čísel je dělitelný čtyřmi.

Zkusím: 1+2+3+4=10 - není to dělitelné čtyřmi $\Rightarrow$ nemá cenu nic dokazovat, jasně to naplatí.
Přesto to zkusím, abych viděl, jak to je.
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 4n+6 = 4n+4+2 = 4(n+1)+2$ $\Rightarrow$ nikdy to nebude dělitelné čtyřmi.

Př. 12: Rozhodni zda je pravdivý následující výrok: Součet *n* po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný číslem *n*.

Výrok je nepravdivý, protože neplatí pro $n = 4$.

Shrnutí: Všechna přirozená čísla můžeme rozdělit podle zbytků po dělení číslem *k* do *k* skupin.