1.5.5 Největší společný dělitel, nejmenší společný násobek

Předpoklady: 1502, 1504

Př. 1: Při satelitním snímkování je potřeba zachytit obdélníkové území o stranách 18 km a 24 km. Satelit snímá povrch Země ve formě čtvercových fotografií o libovolné velikosti strany. Urči, jak pokrýt zmiňované území, co nejmenším počtem co největších čtverců.

Hledám co největší číslo, které dělí 18 i 24.

$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 18\}$

$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 24\}$

Největší společný dělitel je 6 $\Rightarrow$ území rozdělím na 12 čtverců 6 km x 6 km.

Píšeme: $D(18,24) = 6$, čteme **největší společný dělitel** 18 a 24 je 6.

Jak hledat rychleji než ze všech dělitelů (u některých čísel jich je hodně)
Přes prvočíselný rozklad:

$18 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$24 = 2^3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3$

Společné je $2 \cdot 3 = 6$

Největšího společného dělitele je možné hledat i pro více čísel najednou.

Př. 2: Najdi $D(36, 48, 60)$.

$36 = 2^2 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 3$

$48 = 2^4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$D(36,\ 48,\ 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Př. 3: Najdi $D(140, 168, 210)$.

$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$D(140, 168, 210) = 2 \cdot 7 = 14$

Př. 4: Zkus zformulovat větu, která by definovala, jak nalézt největšího společného dělitele čísel *a*, *b*, *c*. Postup musí vycházet z prvočíselného rozkladu čísel.

Největším společným dělitelem čísel *a*, *b*, *c* je součin těch prvočísel, které se vyskytují v prvočíselných rozkladech všech tří čísel. U každého prvočísla použijeme nejvyšší mocninu, která se vyskytuje ve všech prvočíselných rozkladech.

Pedagogická poznámka: Řešení studentů se budou lišit, je třeba společně rozebrat, co je ještě dobře a co není. Chyby si mohou hledat navzájem.

Kdy se hodí hledání největšího společného dělitele?
Při krácení zlomků hledáme největšího společného dělitele čitatele a jmenovatele, abychom ho pak mohli vykrátit.

Př. 5: Jednou z částí slavnostního zahájení olympijských her je společná skladba na hudbu. V průběhu skladby cvičenci vystupují ve skupinách po 18 a 24. Urči nejmenší možný počet cvičenců, který může skladbu nacvičovat.

Cvičenců musí být tolik, aby mohli utvořit skupiny po 18 i 24 hledám nejmenší násobek společný oběma číslům.
píšu násobky:
18, 36, 54, 72, 90, 108, …
24, 48, 72, 96, …
Skladbu musí nacvičovat alespoň 72 cvičenců.

V předchozím příkladě jsme hledali **nejmenší společný násobek** čísel 18 a 24. Píšeme $n(18,24)=72$.

Př. 6: Navrhni význam zápisu $N(12)$.

Jde o množinu všech násobků. Platí tedy: $N(12)=\{12,24,36,48,60....\}$

Pedagogická poznámka: První návrh většinou zní „největší společný násobek“. Právě diskuse o jeho nesmyslnosti (chybí více čísel, největší společný násobek nemůže existovat“…) je hlavním záměrem příkladu.

Hledání nejmenšího společného násobku pomocí množin násobků je pomalé.

Př. 7: Navrhni metodu, hledání nejmenšího společného násobku pomocí prvočíselného rozkladu.

$18=2\cdot 3^2$
$24=2^3\cdot 3$
Vyberu vždy největší mocninu u každého prvočísla, které se objeví (násobek pak bude dělitelný oběma čísly)
$n(18,\ 24)=2^3\cdot 3^2=72$

Jde použít i na více čísel.

Př. 8: Urči $n(14,35,20)$.

$14=2\cdot 7$
$35=5\cdot 7$
$20=2^2\cdot 5$
$n(14,35,20)=2^2\cdot 5\cdot 7=140$

Př. 9: Zkus zformulovat větu, která by definovala, jak nalézt nejmenší společný násobek čísel *a*, *b*, *c*. Postup musí vycházet z prvočíselného rozkladu čísel.

Nejmenším společným násobkem čísel *a*, *b*, *c* je součin těch prvočísel, které se vyskytují v prvočíselných rozkladech alespoň jednoho z těchto tří čísel. U každého prvočísla použijeme nejvyšší mocninu, která se vyskytuje v libovolném prvočíselném rozkladu.

Největší společný dělitel jsme hledali kvůli krácení zlomků, nejmenší společný násobek potřebujeme, když zlomky převádíme na společného jmenovatele.

Př. 10: Najdi společného jmenovatele zlomků $\frac{3}{42}, \frac{6}{28}, \frac{5}{12}$.

Společným jmenovatelem je číslo, které je dělitelné všemi jmenovateli, tedy společný násobek. Nejvýhodnější je použít ten nejmenší.
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
$28 = 2^2 \cdot 7$
$12 = 2^2 \cdot 3$
$n(42, 28, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$
Společným jmenovatelem zadaných zlomků je číslo 84.

Př. 11: Urči $D(756,1680)$ a $n(756,1680)$.

$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$
$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$D(756,1680) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ - společné mocniny
$n(756,1680) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120$ - největší mocniny

Př. 12: Spočítej součiny $756 \cdot 1680$ a $D(756,1680) \cdot n(756,1680)$. Porovnej výsledky a vysvětli.

$756 \cdot 1680 = 1\ 270\ 080$
$84 \cdot 15120 = 1\ 270\ 080$
to není náhoda
Vyznačím si v prvočíselných rozkladech červeně členy do největšího dělitele a modře členy pro nejmenší násobek.
$756 = \color{red}{2^2} \cdot \color{blue}{3^3} \cdot \color{red}{7}$
$1680 = \color{blue}{2^4} \cdot \color{red}{3} \cdot \color{blue}{5} \cdot \color{blue}{7}$
Nic nezbylo, u dvou čísel je to tak vždy.
Pro více než dvě čísla to neplatí.

Shrnutí: Při krácení zlomků potřebujeme $D(a,b)$ (společné prvočinitele), při hledání společného jmenovatele potřebujeme $n(a,b)$ (největší vyskytující se prvočnitele).