1.6.2 Mocniny s přirozeným mocnitelem II

Předpoklady: 1601

Př. 1: Najdi a dokaž pravidlo pro zjednodušení výrazu: $\frac{a^r}{a^s}=$, pokud platí $r>s$, $a\neq 0$.

Pro každé $a\in R$, $a\neq 0$ a $r,s\in N$, $r>s$ platí: $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$.

Důkaz: $\frac{a^r}{a^s}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a ... a\cdot a}^{r-\text{krát}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot a ... a}_{s-\text{krát}}}=\overbrace{a\cdot a ... a}^{(r-s)-\text{krát}}=a^{r-s}$ (vykrátím, co jde)

Př. 2: Odstraň zlomky ve výrazech (nepoužívej krácení, ale vzorec po dělení mocnin):

a) $\frac{2^4}{2^2}=$ b) $\frac{(-4)^3}{(-4)^2}=$ c) $\frac{a^3\cdot b^5}{b^2\cdot a}=$

d) $\frac{12\cdot 18\cdot 8}{32\cdot 9}=$ e) $\frac{a^4\cdot(-a)^3\cdot b^5}{(-a)^6\cdot(-b)^3}=$

a) $\frac{2^4}{2^2}=2^{4-2}=2^2$

b) $\frac{(-4)^3}{(-4)^2}=(-4)^{3-2}=(-4)^1=-4$

nebo jinak: $\frac{(-4)^3}{(-4)^2}=\frac{-4^3}{4^2}=-4^{3-2}=-4^1=-4$

c) $\frac{a^3\cdot b^5}{b^2\cdot a}=a^{3-1}\cdot b^{5-2}=a^2\cdot b^3$

d) $\frac{12\cdot 18\cdot 8}{32\cdot 9}=\frac{2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 3^2\cdot 2^3}{2^5\cdot 3^2}=\frac{2^6\cdot 3^3}{2^5\cdot 3^2}=2\cdot 3$

e) $\frac{a^4\cdot(-a)^3\cdot b^5}{(-a)^6\cdot(-b)^3}=\frac{-a^4\cdot a^3\cdot b^5}{-a^6\cdot b^3}=\frac{a^7\cdot b^5}{a^6\cdot b^3}=ab^2$

Poznámka: Příklad d) je možné řešit i takto:
$\frac{12\cdot 18\cdot 8}{32\cdot 9}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}=2\cdot 3$. Takový postup je však nevhodný, protože je strašně nepřehledný (tím stoupá pravděpodobnost chyby) a jde v podstatě proti smyslu mocnin, protože nevyužívá zjednodušení zápisu, které umožňují.

Pedagogická poznámka: O předchozí poznámce je potřeba se v hodině zmínit, i kdyby tímto způsobem (o čemž ale silně pochybuji) nikdo nepočítal.

Př. 3: Příklad 4 sbírka.

Př. 4: Najdi a dokaž pravidlo pro zjednodušení výrazu: $\left(a^r\right)^s$.

Pro každé $a \in R$ a $r,s \in N$ platí: $\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$.

Důkaz: $\left(a^r\right)^s = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r}_{s-\text{krát}} = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{r-\text{krát}} \ldots \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{r-\text{krát}} .. \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{r-\text{krát}}}_{s-\text{krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(s \cdot r)-\text{krát}} = a^{r \cdot s}$

v součinu je s-krát r-krát *a*, dohromady je tam *a* přesně $r \cdot s$-krát

Př. 5: Odstraň závorky z výrazů:

a) $\left(2^3\right)^5 =$ b) $\left((-\pi)^3\right)^4 =$ c) $\left(-(3)^4\right)^3 =$

a) $\left(2^3\right)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$

b) $\left((-\pi)^3\right)^4 = (-\pi)^{3 \cdot 4} = (-\pi)^{12} = \pi^{12}$

c) $\left(-(3)^4\right)^3 = -3^{4 \cdot 3} = -3^{12}$ - na čtvrtou umocňuji pouze 3

Př. 6: Najdi a dokaž pravidlo pro odstranění závorek ve výrazu: $(a \cdot b)^r$.

Pro každé $a,b \in R$ a $r \in N$ platí: $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$.

Důkaz: $(a \cdot b)^r = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \ldots . (a \cdot b)}_{r-\text{krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{r-\text{krát}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots b}_{r-\text{krát}} = a^r \cdot b^r$

Př. 7: Vypočti:

a) $(2 \cdot 3)^2 =$ b) $\left(2^3 \cdot 3\right)^4 =$ c) $\left(a^2 \cdot b^3\right)^3 =$

d) $\dfrac{\left(a^2 \cdot b^3\right)^3 \cdot a^4}{\left(a^3 \cdot b^2\right)^3} =$ e) $\left[(-a) \cdot b\right]^3 \left(-a^4 b^3\right)^5 =$

a) $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

b) $\left(2^3 \cdot 3\right)^4 = \left(2^3\right)^4 \cdot 3^4 = 2^{12} \cdot 3^4$

c) $\left(a^2 \cdot b^3\right)^3 = \left(a^2\right)^3 \cdot \left(b^3\right)^3 = a^6 \cdot b^9$

d) $\dfrac{\left(a^2\cdot b^3\right)^3\cdot a^4}{\left(a^3\cdot b^2\right)^3}=\dfrac{a^6\cdot b^9\cdot a^4}{a^9\cdot b^6}=\dfrac{a^{10}\cdot b^9}{a^9\cdot b^6}=ab^3$

e) $\left[(-a)\cdot b\right]^3\left(-a^4b^3\right)^5=(-a)^3\cdot b^3\left(-a^4\right)^5\left(b^3\right)^5=-a^3\cdot b^3\left(-a^{20}\right)b^{15}=a^{23}b^{18}$

Př. 8: Najdi a dokaž pravidlo pro odstranění závorek ve výrazu: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r$.

Pro každé $a,b\in R$, $b\neq 0$ a $r\in N$ platí: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}^{r-\text{krát}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{r-\text{krát}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{r-\text{krát}}}=\frac{a^r}{b^r}$$

Př. 9: Uprav výrazy, tak aby si odstranil závorky:

a) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^2=$ b) $\left(-\dfrac{2}{3^2}\right)^3=$ c) $\left(\dfrac{(-2)}{3^2}\right)^4=$

a) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^2=\dfrac{\left(a^2\right)^2}{\left(b^3\right)^2}=\dfrac{a^4}{b^6}$

b) $\left(-\dfrac{2}{3^2}\right)^3=-\dfrac{2^3}{\left(3^2\right)^3}=-\dfrac{2^3}{3^6}$

c) $\left(\dfrac{(-2)}{3^2}\right)^4=\dfrac{(-2)^4}{\left(3^2\right)^4}=\dfrac{2^4}{3^8}$

Př. 10: Zjednoduš výrazy:

a) $\dfrac{2^5\cdot 2^7}{2^{10}}=$ b) $\dfrac{(-3)^3\cdot(-3)^6}{(-3)^5\cdot 3^2}=$

a) $\dfrac{2^5\cdot 2^7}{2^{10}}=\dfrac{2^{5+7}}{2^{10}}=\dfrac{2^{12}}{2^{10}}=2^{12-10}=2^2$

b) $\dfrac{(-3)^3\cdot(-3)^6}{(-3)^5\cdot 3^2}=\dfrac{-3^3\cdot 3^6}{-3^5\cdot 3^2}=\dfrac{3^3\cdot 3^6}{3^5\cdot 3^2}=\dfrac{3^{3+6}}{3^{5+2}}=\dfrac{3^9}{3^7}=3^{9-7}=3^2$

Př. 11: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel výraz $\dfrac{12^6\cdot 4^3\cdot 15^4}{50^2\cdot 16^4\cdot 9^4}$.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu není řešení uvedeno schválně. Zadávám ho na domácí počítání a kontrolujeme ho společně na začátku další hodiny. Právě různé způsoby jeho řešení jsou východiskem pro náš další postup.

Př. 12: Sbírka příklad 5.

Př. 13: Petáková:
strana 62/cvičení 38 a)
strana 62/cvičení 39 a) c)
strana 62/cvičení 44 a)

Shrnutí: $a^3 = a \cdot a \cdot a$ a z toho je všechno jasné.