

1.6.5 Mocniny s celým mocnitelem II

Počítání se zlomky:

Př. 1: Uprav zlomek $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$ tak, abys odstranil zápornou mocninu.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \frac{3^{-4}}{4^{-4}} = 3^{-4} \cdot \frac{1}{4^{-4}} = \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4^4}} = \frac{4^4}{3^4}$$

$$\text{jinak } \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{1}{\frac{3^4}{4^4}} = 1 \cdot \frac{4^4}{3^4} = 1 \cdot \frac{4^4}{3^4} = \frac{4^4}{3^4}$$

$$\text{ještě jinak } \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{4^4}{3^4}.$$

\Rightarrow všechny výsledky stejné

Př. 2: Zformuluj pravidlo pro odstranění záporné mocniny ze zlomku.

Pro každá dvě reálná čísla a, b , $a \neq 0, b \neq 0$ a pro každé celé číslo z platí:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = \left(\frac{b}{a}\right)^z$$

Př. 3: Uprav zlomky, tak abys odstranil zápornou mocninu:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \text{b) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \quad \text{c) } \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{c) } \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{3^2}{2^2} = \frac{2^3}{3^3} \frac{3^2}{2^2} = \frac{2}{3}$$

Př. 4: Najdi alespoň jeden způsob, jak převést dělení výrazem $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ na násobení.

Zkoušíme:

$$1: \left(\frac{a}{b}\right)^z = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^z} = 1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = 1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^z$$

Pro každá dvě reálná čísla a, b , $a \neq 0, b \neq 0$ a pro každé celé číslo z platí:

$$1: \left(\frac{a}{b}\right)^z = 1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = 1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^z$$

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny tvoří samostatné počítání studentů, kontrolu provádíme tak, aby si všichni stihli spočítat alespoň příklady 5. –7. Ti rychlejší stihnou všechno a dopočítají se až k příkladům se sbírky. Je potřeba, aby studenti nejen nedělali chyby, ale alespoň příklady, které počítají ve škole, řešili rozumných způsobem (podle zásad KISS, bez obcházení záporných mocnin atd.).

Př. 5: Uprav výrazy a výsledek vyjádři bez použití zlomků:

$$\text{a) } \frac{a^2b}{c^3} : \frac{ab^2}{c^2} = \quad \text{b) } \frac{a^2}{c^{-3}} : \left(\frac{a}{c^2}\right)^{-2} = \quad \text{c) } \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} : \left(\frac{b^3c}{a^2}\right)^2 =$$

$$\text{a) } \frac{a^2b}{c^3} : \frac{ab^2}{c^2} = \frac{a^2b}{c^3} \cdot \frac{c^2}{ab^2} = a^{2-1} \cdot b^{1-2} \cdot c^{2-3} = a \cdot b^{-1} \cdot c^{-1}$$

$$\text{b) } \frac{a^2}{c^{-3}} : \left(\frac{a}{c^2}\right)^{-2} = \frac{a^2}{c^{-3}} \cdot \left(\frac{a}{c^2}\right)^2 = \frac{a^2}{c^{-3}} \cdot \frac{a^2}{c^4} = \frac{a^{2+2}}{c^{-3+4}} = \frac{a^4}{c} = a^4 \cdot c^{-1}$$

$$\text{c) } \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} : \left(\frac{b^3c}{a^2}\right)^2 = \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} \cdot \left(\frac{a^2}{b^3c}\right)^2 = \frac{a^{-3}b^2}{c^{-3}} \cdot \frac{a^4}{b^6c^2} = \frac{a^{-3+4}b^{2-6}}{c^{-3+2}} = \frac{ab^{-4}}{c^{-1}} = acb^{-4}$$

Př. 6: Zjednoduš výraz $\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^{-3}$ a výsledek uveď pomocí kladných mocnin

$$\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^{-3} = \frac{a^6b^{-9}}{c^{-6}} = \frac{a^6c^6}{b^9}$$

$$\text{jinak } \left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^{-3} = \left(\frac{c^2}{a^{-2}b^3}\right)^3 = \frac{c^6}{a^{-6}b^9} = \frac{a^6c^6}{b^9}$$

Pedagogická poznámka: U tohoto a následujících příkladů je v případě, že studenti počítají sami, potřeba zabránit tomu, aby obcházeli používání záporných mocnin a tak komplikovali výpočet, například takto:

$$\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{a^{-2}b^3}{c^2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}b^3\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{b^3}{a^2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{b^3}{a^2c^2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{b^6}{a^6c^6}} = \frac{a^6c^6}{b^9}$$

Př. 7: Zjednoduř výrazy a výsledky uveď pomocí kladných mocnin:

a) $\left(\frac{9a^{-2}c^3}{8b^{-2}}\right)^{-3}$

b) $\frac{9a^6b^{-5}}{c^{-3}} : \left(\frac{3^{-1}b^3}{a^2c^{-4}}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{9a^{-2}c^3}{8b^{-2}}\right)^{-3} = \left(\frac{3^2a^{-2}c^3}{2^3b^{-2}}\right)^{-3} = \frac{3^{-6}a^6c^{-9}}{2^{-9}b^6} = \frac{2^9a^6}{3^6c^9b^6}$

b) $\frac{9a^6b^{-5}}{c^{-3}} : \left(\frac{3^{-1}b^3}{a^2c^{-4}}\right)^{-2} = \frac{3^2a^6b^{-5}}{c^{-3}} \cdot \left(\frac{3^{-1}b^3}{a^2c^{-4}}\right)^2 = \frac{3^2a^6b^{-5}}{c^{-3}} \cdot \frac{3^{-2}b^6}{a^4c^{-8}} = \frac{a^2b^1}{c^{-11}} = a^2bc^{11}$

Př. 8: Zapiš výraz $\left(\frac{8 \cdot 10^2 \cdot 9^{-3}}{15^4 \cdot 12^{-3}}\right)^{-3} : \left(\frac{24^{-1} \cdot 6^3}{20^2 \cdot 5^{-4}}\right)^2$ pomocí celočíselných mocnin prvočísel bez zlomkové čáry. Dodržuj zásadu KISS.

$\left(\frac{8 \cdot 10^2 \cdot 9^{-3}}{15^4 \cdot 12^{-3}}\right)^{-3} : \left(\frac{24^{-1} \cdot 6^3}{20^2 \cdot 5^{-4}}\right)^2 =$ složená čísla rozložím na prvočísla

$\left(\frac{2^3 \cdot [2 \cdot 5]^2 \cdot [3^2]^{-3}}{[3 \cdot 5]^4 \cdot [2^2 \cdot 3]^{-3}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{[2^3 \cdot 3]^{-1} \cdot [2 \cdot 3]^3}{[2^2 \cdot 5]^2 \cdot 5^{-4}}\right)^2 =$ odstraním vnitřní hranaté závorky

$\left(\frac{2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^{-6}}{3^4 \cdot 5^4 \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-3}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2^{-3} \cdot 3^{-1} \cdot 2^3 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 5^{-4}}\right)^{-2} =$ vypočítám vnitřky obou zlomků

$\left(2^{3+2+6} \cdot 5^{2-4} \cdot 3^{-6-4-(-3)}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2^{-3+3-4} \cdot 3^{-1+3}}{5^{2-4}}\right)^{-2} =$ odstraním závorky

$\left(2^{11} \cdot 5^{-2} \cdot 3^{-7}\right)^{-3} \cdot \left(2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^2\right)^{-2} =$

$2^{-33} \cdot 5^6 \cdot 3^{21} \cdot 2^8 \cdot 3^{-4} \cdot 5^{-4} =$ spočítám obě části dohromady

$= 2^{-33+8} \cdot 5^{6-4} \cdot 3^{21-4} = 2^{-25} \cdot 5^2 \cdot 3^{17}$

Pedagogická poznámka: Příklad je nutné řešit pomalu po jednotlivých krocích a trvat na tom, aby studenti pracovali systematicky a přehledně.

Př. 9: Sběrka příklad 7 d) e) f) g) h)
Sběrka příklad 8 h)

Př. 10: Petáková:
strana 62/cvičení 43 a) b) c) d) e) f)

Shrnutí: Pro zlomek se zápornou mocninou platí $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$. Při dělení zlomky platí:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^z : \left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = \left(\frac{b}{a}\right)^z.$$