1.7.4 Mnohočleny, sčítání a odčítání mnohočlenů

Předpoklady: 1701

Mnohočlen = zvláštní typ výrazů $\Rightarrow$ Jak je poznáme?
Mnohočleny obsahují pouze přirozené mocniny neznámých (jedné nebo více).

Př. 1: Rozhodni, které z následujících výrazů jsou mnohočleny.

a) $x^2y^2 - 2x^2 + 3y$

b) $x^2 - \frac{3}{4x} + 8$

c) $x^2 + 3y\sqrt{x} + y^2$

d) $x^2 - \frac{3}{4}x + 8$

a) $x^2y^2 - 2x^2 + 3y$ - je mnohočlen dvou proměnných

b) $x^2 - \frac{3}{4x} + 8$ - není mnohočlen (x je ve jmenovateli $\Rightarrow$ záporná mocnina x)

c) $x^2 + 3y\sqrt{x} + y^2$ - není mnohočlen (obsahuje odmocninu z x)

d) $x^2 - \frac{3}{4}x + 8$ - je mnohočlen (sice obsahuje zlomek, ale bez neznámé ve jmenovateli)

I mnohočleny mají přesnou definici.

Přesná definice mnohočlenu s jednou proměnnou
Mnohočlen (Polynom) s jednou proměnou je výraz, který se dá zapsat jako:
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, kde $a_0; a_1; a_2; ...; a_n$ jsou reálná čísla, n je celé nezáporné číslo a x je proměnná.

Názvosloví:

je-li $a_n \neq 0$	říkáme, že mnohočlen je „n-tého stupně“, n je pak stupeň mnohočlenu
$a_n, a_{n-1}, ...a_2, a_1, a_0$	koeficienty mnohočlenu (pouze reálná čísla před mocninou neznámé)
a_nx^n, a_1x^1	členy mnohočlenu = součin koeficientu s odpovídající mocninou neznámé (obecně se to píše takto: člen mnohočlenu je výraz ve tvaru a_kx^k, kde $0 \leq k \leq n$)
a_0	absolutní člen
a_1x^1	lineární člen
a_2x^2	kvadratický člen
a_3x^3	kubický člen
$a_1x^1 + a_0$	lineární mnohočlen (mnohočlen 1. řádu, častěji se píše místo $a_1x + a_0 \rightarrow ax + b$)
$a_2x^2 + a_1x + a_0$	kvadratický mnohočlen (mnohočlen 2. řádu, častěji se píše místo $a_2x^2 + a_1x + a_0 \rightarrow ax^2 + bx + c$)

Pedagogická poznámka: Vždycky si povídáme o tom, že pojmenování členů je logické: absolutní = neměnný (bez proměnné), lineární = lineární funkce, kvadratický = blbnout na kvadrát, kubický = kubík vody (objemová jednotka)

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady mohou působit zbytečně, ale zkušenost jednoznačně ukazuje, že obecné zápisy dělají studentům obrovské problémy. Ačkoliv se s nimi v učebnicích setkávají poměrně často (nebo by se spíš setkávat měli), jen velmi málo z nich se snaží jakýmkoliv způsobem interpretovat, co vlastně znamenají.

Př. 2: Je dán mnohočlen $-x^3+2x^2-\pi x+3$. Urči jeho stupeň a jeho koeficienty a_0, a_1, a_2 a_3. Napiš jeho kvadratický člen.

Napíšeme si pod sebe obecný tvar a konkrétní mnohočlen, porovnáním získáme hodnoty koeficientů.

$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$-x^3+\ 2x^2-\ \pi x+\ 3$

Z porovnání je zřejmé, že platí:

$a_3=-1$ $\quad a_2=2$ $\quad a_1=-\pi$ $\quad a_0=3$

kvadratický člen: $2x^2$

Př. 3: Je dán mnohočlen $3x^4-2x^2+3$. Urči jeho stupeň a všechny jeho koeficienty (tedy čísla $a_n, a_{n-1}, \ldots. a_2, a_1, a_0$). Urči hodnotu koeficientu a_{n-2}.

n $\quad n=4$ (protože nejvyšší mocnina *x* je čtvrtá)

a_3 ($a_3=a_{n-1}$) $\quad a_3=0$ (mnohočlen neobsahuje žádný člen s x^3)

a_2 $\quad a_2=-2$ (před x^2 je –2)

a_1 $\quad a_1=0$ (*a₁* je vždy před *x* a když tam *x* není tak to znamená, že je vynásobené nulou a tedy $a_1=0$)

a_0 $\quad a_0=3$ (a_0 je koeficient bez *x*)

a_{n-2} $\quad a_{n-2}=a_{4-2}=a_2=-2$

Seřazení mnohočlenu

Je zvykem zapisovat jednotlivé členy mnohočlenu v pořadí podle mocnin, s nejvyššími mocninami na začátku. Dodržování této konvence usnadňuje zápis, jeho kontrolu a urychluje počítání.

My budeme všechny mnohočleny uvádět seřazené.

Př. 4: Seřaď mnohočleny do konvenčního pořadí:

a) $2x-x^2\sqrt{3}+2+x^4$

b) $x^2y-2x+4x^3+2xy+2-3x^2$

a) $2x-x^2\sqrt{3}+2+x^4=x^4-x^2\sqrt{3}+2x+2$

b) $x^2y-2x+4x^3+2xy+2-3x^2=4x^3+x^2y-3x^2+2xy-2x+2$

Opačný mnohočlen
Koeficienty opačného mnohočlenu jsou čísla ke koeficientům původnímu mnohočlenu.

Př. 5: Najdi opačný mnohočlen k mnohočlenu x^4-3x^2+2x-1.

Opačný mnohočlen: $-x^4+3x^2-2x+1$

Součet mnohočlenů
Mnohočleny sečteme tak, že sečteme koeficienty odpovídajících si členů mnohočlenu (členy se stejnou mocninou *x* pokud máme jednu neznámou, pokud je neznámých víc musí být mocniny všech stejné).

Př. 6: Sečti mnohočleny:
a) x^4+2x^2-3x+5 a $3x^3-2x^2+x-4$
b) $3x^2-xy+2x-2$ a $4x^2y-2xy-\sqrt{3}x+3$
Urči koeficient a_1 u výsledných mnohočlenů.

a)
$$x^4+2x^2-3x+5+\left(3x^3-2x^2+x-4\right)=x^4+3x^3-2x+1$$
koeficient a_1 je reálné číslo, které se nachází u $x \Rightarrow a_1=-2$
b)
$$3x^2-xy+2x-2+\left(4x^2y-2xy-\sqrt{3}x+3\right)=3x^2+4x^2y-xy-2xy+2x-\sqrt{3}x-2+3=$$
$$3x^2+4x^2y-3xy+\left(2-\sqrt{3}\right)x+1$$
koeficient a_1 je reálné číslo, které se nachází u $x \Rightarrow a_1=2-\sqrt{3}$

Rozdíl mnohočlenů
Mnohočleny odečteme tak, že k prvnímu mnohočlenu přičteme mnohočlen opačný k druhému (odečítanému) mnohočlenu.

Př. 7: Urči rozdíl mnohočlenů:
a) $\left(x^4+2x^2-3x+5\right)-\left(3x^3-2x^2+x-4\right)$
b) $\left(3x^2-xy+2x-2\right)-\left(4x^2y-2xy-\sqrt{3}x+3\right)$.

a)
$$\left(x^4+2x^2-3x+5\right)-\left(3x^3-2x^2+x-4\right)=x^4+2x^2-3x+5-3x^3+2x^2-x+4=$$
$$=x^4-3x^3+4x^2-4x+9$$

b)
$$3x^2-xy+2x-2-\left(4x^2y-2xy-\sqrt{3}x+3\right)=3x^2-xy+2x-2+\left(-4x^2y+2xy+\sqrt{3}x-3\right)=$$
$$=3x^2-4x^2y-xy+2xy+2x+\sqrt{3}x-2-3=3x^2-4x^2y+xy+\left(2+\sqrt{3}\right)x-5$$

Příště už budeme počítat bez mezikroku, rovnou:

$$\left(x^4+2x^2-3x+5\right)-\left(3x^3-2x^2+x-4\right)=x^4-3x^3+4x^2-4x+9$$

Shrnutí: Mnohočlen je speciální typ výrazu, kde jsou neznámé pouze v přirozených mocninách.