2.1.5 Graf funkce I

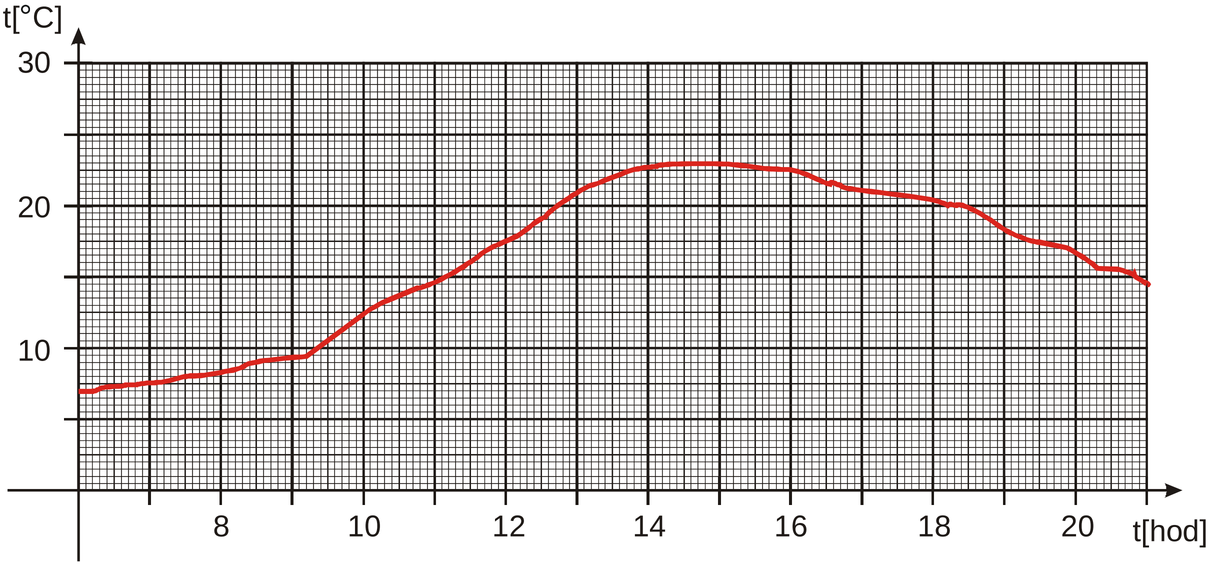
Předpoklady: 2104

Pedagogická poznámka: Největší změnou oproti klasickému řazení v gymnaziální sadě, je spojení dílů o rovnicích a funkcích. Představa grafu umožňuje studentům daleko lépe pochopit o co při řešení rovnice a zejména nerovnic jde, případně jaké může být řešení. Je faktem, že minimálně polovina studentů má o grafech je velice vágní povědomí a čtvrtina nejhorších neumí ani odečítat hodnoty. Proto se ukázalo, že je nutné zařadit na začátek kapitoly o funkcích několik hodin, které procvičují právě orientaci v grafech. Při probírání těchto tří hodin jsou mezi studenty obrovské rozdíly, nechávám rychlejší část třídy, aby si ve zbytku času potichu pracovala na čemkoliv a věnuji se těm nejhorším.

Pedagogická poznámka: Přesné odečítání není možné z obrázků promítaných z učebnice. Grafy je udělány ještě jednou ve speciálním souboru, který vytisknu a dám ho studentům k dispozici.
U termografu je pak možné trvat na přesném odečtení hodnot. Při tom se pozná, kdo ze studentů je schopen přepočítávat údaje na osách a zjistit velikost jednoho čtverečku.
U ostatních příkladů pak můžete při pomoci slabším studentům ukazovat prstem nebo tužkou do papírku před nimi, což je daleko názornější než blikání ukazovátkem na vzdálené stěně.
V neposlední řadě jde i to, že grafy jsou příliš velké a nevejdou se v dostatečném přiblížení na stěnu najednou i s řešením.

Pedagogická poznámka: Ve všech příkladech je dobré studentům neustále ukazovat, že jde pořád o zobrazování cesto od čísel na ose x k číslům na ose y.

Př. 1: Z termografu na obrázku zjisti:
a) teplotu vzduchu v 8:00, 10:30, 6:00, 15:45 a 20:20
b) jaká byla nejvyšší a nejnižší teplota
c) v jakém časovém rozmezí byla teplota měřena
d) v jakém rozsahu se pohybovaly teploty během měření
e) definiční obor a obor hodnot zachycené funkce
f) kdy byla teplota vzduchu vyšší než 20°
g) kdy byla teplota vzduchu nižší než 15°



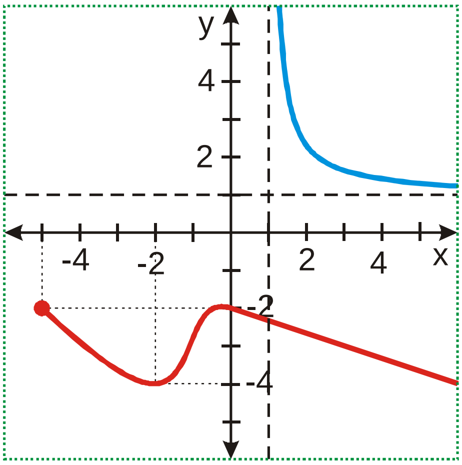
a) teplotu vzduchu:

čas	8:00	10:30	6:00	15:45	20:20
teplota	8,3°C	13,7°C	7°C	22,5°C	15,4°C

b) jaká byla nejvyšší a nejnižší teplota
nejvyšší teplota 23°C, nejnižší teplota 7°C
c) v jakém časovém rozmezí byla teplota měřena
od 6:00 do 21:00
d) v jakém rozsahu se pohybovaly teploty během měření
od 7°C do 23°C
e) definiční obor a obor hodnot zachycené funkce
funkce nemá žádný předpis $\Rightarrow$ má smysl uvažovat o jejich hodnotách pouze pro čísla s nakreslenou hodnotou v grafu $\Rightarrow$ $D(f) = \langle 6;21 \rangle$, $H(f) = \langle 7;23 \rangle$
f) kdy byla teplota vzduchu vyšší než 20°
od 12:42 do 18:24
g) kdy byla teplota vzduchu nižší než 15°
od 6: 00 do 11:09, od 20:50 do 21:00

Pedagogická poznámka: Způsob, kterým studenti vnímají matematiku dobře ilustrují dva fakty:
předchozí příklad je pro ně podstatně jednodušší než hledání funkčních hodnot v příkladu 4.
body c) d) udělají bez problémů, ale nedaří se jim bod e). Mají totiž problémy vztáhnout definici, kterou si mohou třeba i přečíst z poznámek z minulé hodiny, k něčemu reálnému. Upozorněte je na to.

Něž se pustíme do dalších příkladů musíme si ujasnit, jak se grafy funkcí kreslí. Problém nastává, když chceme nakreslit funkci, s velkým rozsahem definičního oboru nebo oboru hodnot. Máme k dispozici pouze omezenou plochu, na kterou se snažíme nakreslit všechno „důležité“ o chování funkce:



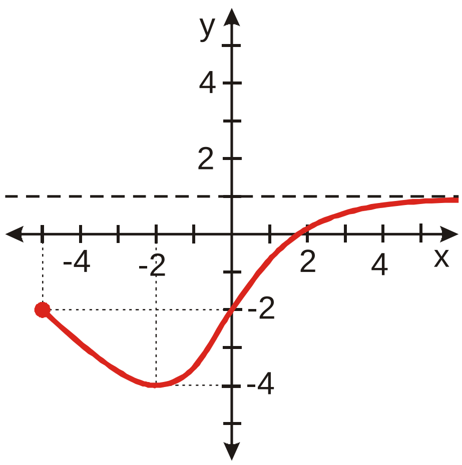
Pokud je graf funkce nakreslen až ke kraji obrázku (na obrázku je okraj vyznačen zelenými tečkami), **předpokládá se, že funkce pokračuje stejným způsobem dále** $\Rightarrow$

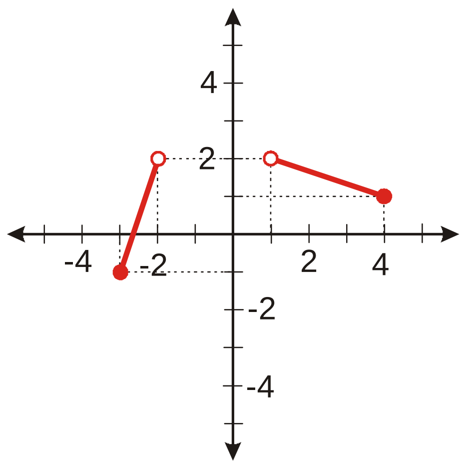
- červená funkce vpravo dole postupně směřuje šikmo dolů $\Rightarrow$ hodnoty *x* s postupně zvětšují k nekonečnu a hodnoty *y* se postupně zmenšují k mínus nekonečnu

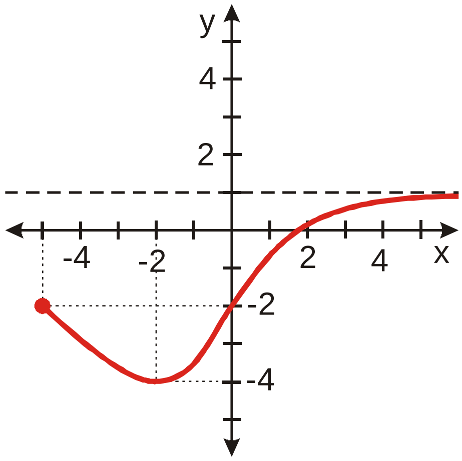
Aby bylo změřování funkcí zřejmější, kreslíme do obrázku pomocné čáry (svislá a vodorovná čárkovaná čára) $\Rightarrow$

- modrá funkce vpravo nahoře postupně zvětšuje hodnoty *x* k nekonečnu, hodnoty *y* se postupně zmenšují, ale ne k mínus nekonečnu jako u červené funkce pouze se čím dál víc blíží k jedničce (vodorovná čára)
- modrá funkce se nahoře postupně zprava přibližuje k svislé čáře procházející jedničkou $\Rightarrow$ jak se hodnoty *x* zprava přibližují k 1, hodnoty *y* se přibližují k nekonečnu

Př. 2: Na obrázcích jsou nakresleny grafy funkcí. Urči jejich $D(f)$ a $H(f)$.

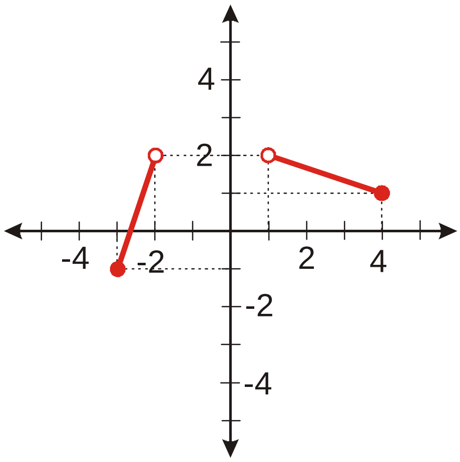






$D(f) = \langle -5; \infty)$

$H(f) = \langle -4; 1)$



$D(f) = \langle -3; -2) \cup (1; 4\rangle$

$H(f) = \langle -1; 2)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je také opakováním sjednocení množin a intervalů. Je třeba trvat na tom, že je nutností, aby si tyto věci studenti pamatovali, bez ohledu na to, že byly probrány už před dlouhou dobou.

Někteří studenti mají problémy s řešením předchozího příkladu kvůli tomu, že stále nepracují s tím, že definiční obor určují hodnoty s osy *x* a obor hodnoty čísla s osy *y*.

Př. 3: Na obrázku je nakreslen graf relace. Urči:

a) $D(f)$, $H(f)$ b) $f(-1)$, $f(3)$, $f(-4)$

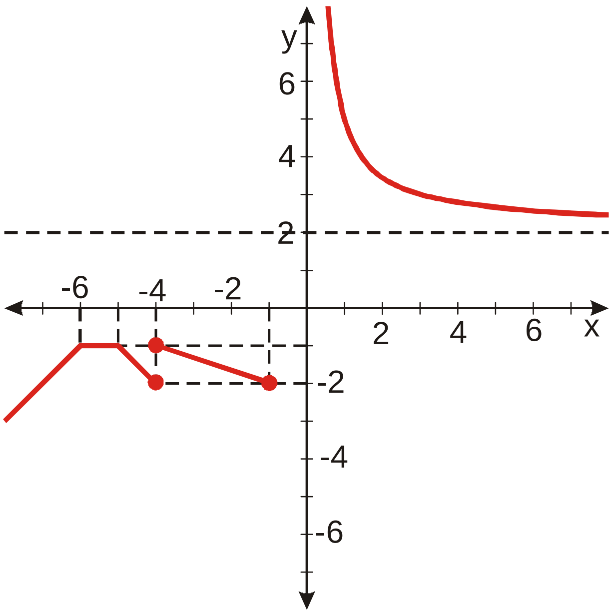
c) všechna x_1, pro která platí $f(x_1) = -2$

d) všechna x_2, pro která platí $f(x_2) = -1$.

e) všechna *x*, pro která je hodnota funkce záporná

f) všechna *x*, pro která je hodnota funkce větší než 4

g) proč není tato relace funkcí



a)

$D(f) = (-\infty; -1\rangle \cup (0; \infty)$

$H(f) = (-\infty; -1\rangle \cup (2; \infty)$

b) $f(-1) = -2$, $f(3) = 3$, $f(-4) = \emptyset$

c) $x_1 \in \{-7; -1\}$

d) $x_2 \in \langle -6; -5\rangle$

e) $f(x) < 0$ pro $x \in (-\infty; -1\rangle$

f) $f(x) > 4$ pro $x \in (0; 1,5\rangle$

Př. 4: Petáková:
strana 24/cvičení 11 a) b)

Shrnutí: Graf funkce nám ukazuje cestu od čísel na ose x (definiční obor) k číslům na ose y (obor hodnot).