2.1.10 Lineární funkce III

Předpoklady: 2109

Minulá hodina
Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).

Pedagogická poznámka: Než začnou studenti kreslit grafy, je dobré si popovídat o strategii na volbu bodů, které použijí na kreslení grafů.
Nepřestává mě překvapovat, jak velký problém pro studenty kreslení následujících grafů představuje. Nezbývá než vydržet a snažit se jim radit, jak by mohli kreslení urychlit. Důležité je hlídat, aby si nepletli *x* a *y*, hodně chyb vzniká i tím, že studenti nejdřív spočítají všechny body u všech funkcí a pak teprve začnou kreslit. Myslím, že je třeba se snažit, aby tento postup nepoužívali. Jednak se jim může něco splést a jednak se tím ztrácí souvislost mezi spočítaným a nakresleným. Samozřejmě nikde není dáno, že by studenti měli pro nakreslení grafů používat stejné body jako učebnice.

Pedagogická poznámka: U pomalejších studentů nečekáme až u prvních dvou příkladů nakreslí všechny čtyři grafy. Stačí, když udělají dva, obrázek všech grafů si mohou prohlédnout na stěně a vyvozovat z něj.

Jaký je význam konstant *a*, *b*?
Nejdřív *b*.

Př. 1: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí: $f_1 : y = x$, $f_2 : y = x + 1$, $f_3 : y = x + 3$, $f_4 : y = x - 2$. Podle obrázku rozhodni, jak ovlivňují hodnoty parametru *b* graf lineární funkce.

$f_1 : y = x$

dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x = 0 \Rightarrow$ bod $[0;0]$

dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x = 2 \Rightarrow$ bod $[2;2]$

$f_2 : y = x + 1$

dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$

dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow$ bod $[2;3]$

$f_3 : y = x + 3$

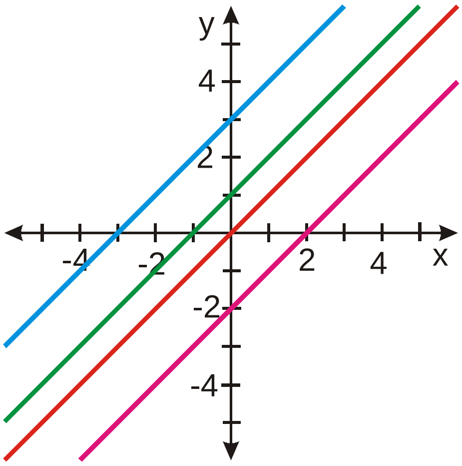
dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x + 3 = 0 + 3 = 3 \Rightarrow$ bod $[0;3]$

dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x + 3 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow$ bod $[2;5]$

$f_4 : y = x - 2$

dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x - 2 = 0 - 2 = -2 \Rightarrow$ bod $[0;-2]$

dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x - 2 = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$ bod $[2;0]$



$\Rightarrow$ všechny grafy mají stejný směr, ale jsou různě posunuté ve svislém směru. $\Rightarrow$ konstanta *b* neovlivňuje směr přímky, ale její posunutí ve svislém směru (průsečík s osou *y*).

Poznámka: Metoda, kterou jsme použili je vlastně fyzikální metodou na objevování funkčních závislostí. Jednu proměnou jsme měnili a vše ostatní nechávali stejné, abychom zjistili, jak měnící se proměnná ovlivňuje výsledek.

Teď *a*.

Př. 2: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí: $f_1 : y = x + 1$, $f_2 : y = 3x + 1$, $f_3 : y = 0,5x + 1$, $f_4 : y = -2x + 1$. Podle obrázku rozhodni, jak ovlivňují hodnoty parametru *a* graf lineární funkce.

$f_1 : y = x + 1$

dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$

dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow$ bod $[2;3]$

$f_2 : y = 3x + 1$

dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = 3x + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$

dosazujeme $x = 1 \Rightarrow y = 3x + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \Rightarrow$ bod $[1;4]$

$f_3 : y = 0,5x + 1$

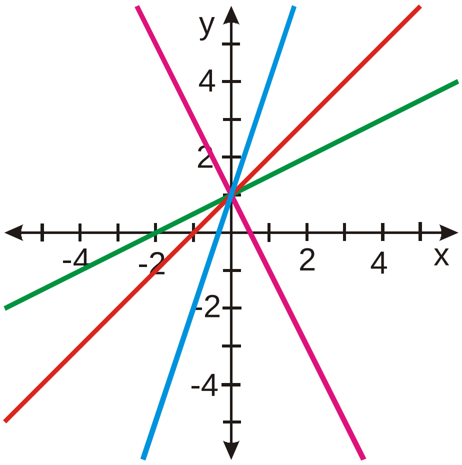
dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = 0,5x + 1 = 0,5 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$

dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = 0,5x + 1 = 0,5 \cdot 2 + 1 = 2 \Rightarrow$ bod $[2;2]$

$f_4 : y = -2x + 1$

dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = -2x + 1 = -2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$

dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = -2x + 1 = -2 \cdot 2 + 1 = -3 \Rightarrow$ bod $[2;-3]$



Všechny grafy se s osou y protínají v bodě $[0,1]$, ale mají různý směr. $\Rightarrow$ konstanta *a* neovlivňuje posunutí přímky, ale její směr.

$f_2 : y = 3x + 1$ $\Rightarrow$ velké *a*, strmý graf

$f_4 : y = 0,5x + 1$ $\Rightarrow$ malé *a*, pozvolný graf

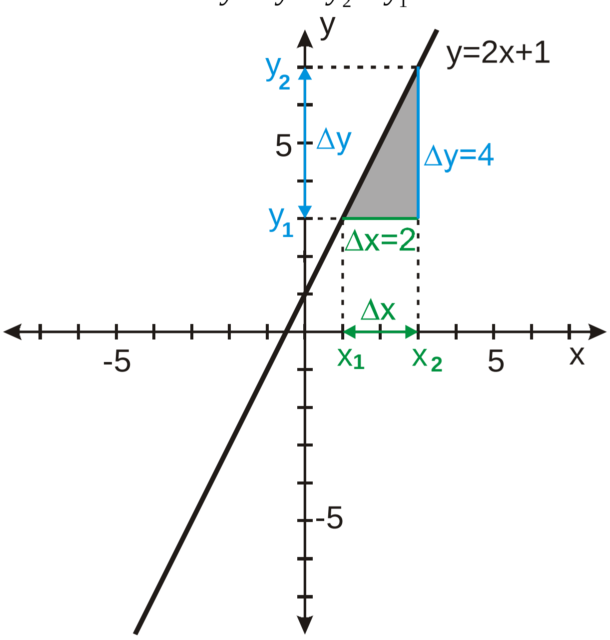
Jak popisuje číslo *a* sklon?

velký sklon = změní-li se *x* o málo pak se *y* zvětší o hodně.

Zkusíme na funkci $y = 2x + 1$

O kolik se zvětší *x*: $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$

O kolik se zvětší *y*: $\Delta y = y_2 - y_1 = 7 - 3 = 4$

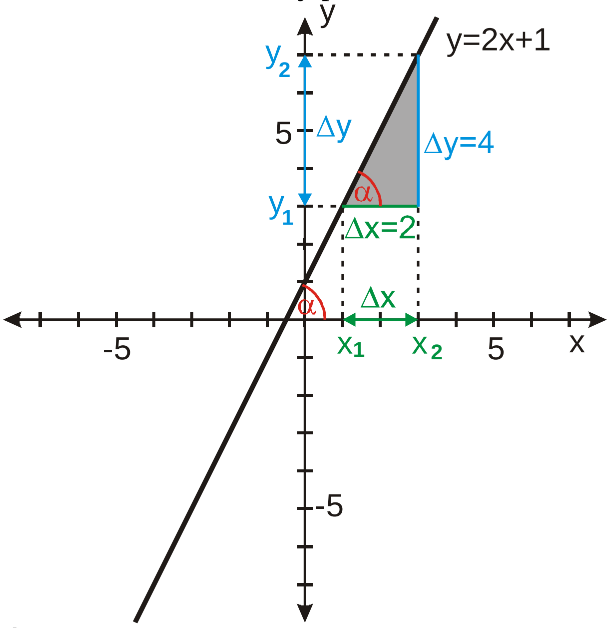


Kopec je strmý, když na dráze 3 m vylezeme o 2 m výš. Když vylezeme na dráze 1 km o 10 výš strmé to moc není. $\Rightarrow$ strmost není velikost Δy, ale poměr $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $\Rightarrow$ spočteme ho:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4}{2} = 2$ - to je hodnota *a*! $\Rightarrow$ tedy $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Jiný zápis $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Směr udává i úhel, který přímka svírá s osou x $\Rightarrow$ i úhel by měl jít vyjádřit pomocí a



Úhel můžeme v pravoúhlém trojúhelníku vyjádřit pomocí goniometrických funkcí, nejlépe tangens $\operatorname{tg}\alpha=\frac{protilehlá}{přilehlá}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=a \Rightarrow a=\operatorname{tg}\alpha$´

Pedagogická poznámka: Nechávám studenty, aby si sami zvolili jiná čísla x_1 a x_2 a ověřili si platnost předchozích výsledků.

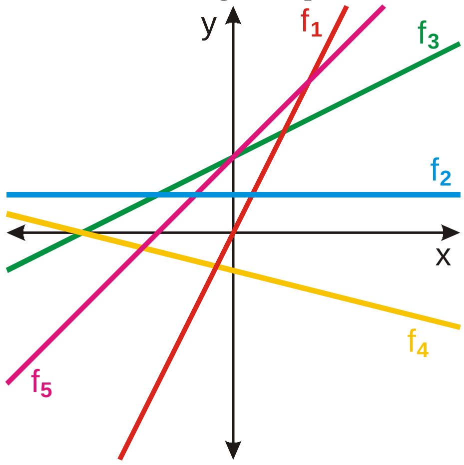
Stejný typ grafu už známe z fyziky:
rovnoměrný pohyb $s=vt+s_0 \Leftrightarrow y=ax+b$.
Význam konstant je stejný:

- a udává, jak rychle se mění y $\Leftrightarrow$ v (rychlost) udává, jak rychle se mění dráha
- b udává, průsečík s osou y $\Leftrightarrow$ s_0 udává, jak vysoko na ose s začíná graf dráhy

Konstanta *a* určuje u grafu lineární funkce směr, konstanta *b* posunutí ve svislém směru.

Př. 3: Na obrázku bez popsaných os jsou načrtnuty grafy funkcí:
a) $y=-0,25x-1$ b) $y=1$ c) $y=x+2$
d) $y=2x$ e) $y=0,5x+2$

Přiřaď každému grafu správnou funkci.



Správné přiřazení:

$f_1: y = 2x$ - jediná přímá úměrnost, nejstrmější ze všech funkcí

$f_2: y = 1$ - jediná konstantní funkce, protíná se s osou y níže než většina ostatních funkcí

$f_3: y = 0,5x + 2$ - protíná se s osou y výše než konstantní funkce, má menší sklon

$f_4: y = -0,25x - 1$ - protíná se s osou y v záporných číslech, jediná jde dolů

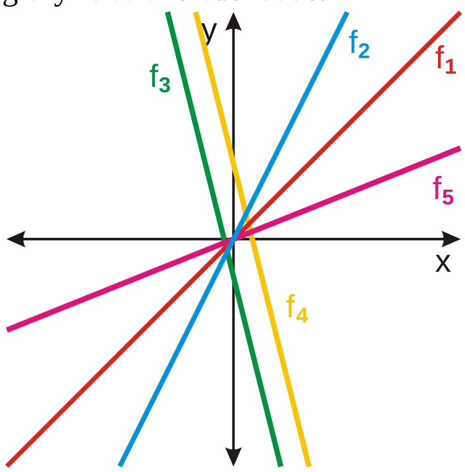
$f_5: y = x + 2$ - protíná se s osou y výše než konstantní funkce, má větší sklon

Př. 4: Na obrázku bez popsaných os jsou načrtnuty grafy funkcí:

a) $y = 0,2x$ b) $y = -2x + 2$ c) $y = x$

d) $y = 0,5x$ e) $y = -2x - 1$

Přiřaď každému grafu správnou funkci. Upozornění: obrázek je zdeformován, sklony přímek neodpovídají sklonům přímek při normálním zobrazení. Je nutné posuzovat grafy relativně vůči sobě.



Správné přiřazení:

$f_1: y = 0,5x$ - přímá úměrnost, středně velká strmost

$f_2: y = x$ - přímá úměrnost, nejstrmější graf

$f_3: y = -2x - 1$ - funkce směřuje dolů, protíná se s osou y v záporném čísle

$f_4: y = -2x + 2$ - funkce směřuje dolů, protíná se s osou y v kladném čísle

$f_5: y = 0,2x$ - přímá úměrnost, nejméně strmý graf

Př. 5: Načrtni (bez počítání a vynášení bodů) do jednoho obrázku bez popsaných os (analogicky jako v předchozím příkladě) grafy těchto funkcí:

a) $f_1 : y = 3x - 1$ b) $f_2 : y = 3x + 2$ c) $f_3 : y = -2x$

d) $f_4 : y = -x + 2$ e) $f_5 : y = -1$

a) $f_1 : y = 3x - 1$

$a = 3 \Rightarrow$ strmý graf směřující doprava nahoru, $b = -1 \Rightarrow$ s osou y se protíná pod počátkem

b) $f_2 : y = 3x + 2$

$a = 3$ $b = 2 \Rightarrow$ graf rovnoběžný s grafem z bodu a) s osou y se protíná nad počátkem

c) $f_3 : y = -2x$

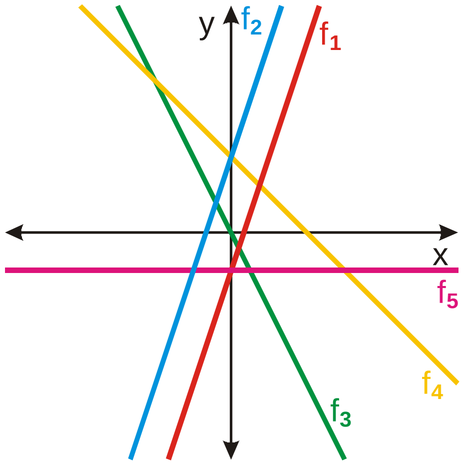
$a = -2 \Rightarrow$ strmý (ale méně než v bodech a) b)) graf směřující doprava dolů, $b = 0 \Rightarrow$ prochází počátkem

d) $f_4 : y = -x + 2$

$a = -1 \Rightarrow$ graf směřující doprava dolů (méně strmý než v bodě c)), $b = 2 \Rightarrow$ s osou y se protíná nad počátkem ve stejném bodě jako graf z bodu b)

e) $f_5 : y = -1$

$a = 0 \Rightarrow$ konstantní funkce, vodorovná přímka, $b = -1 \Rightarrow$ s osou y se protíná pod počátkem ve stejném bodě jako graf a)



Shrnutí: Grafy lineární funkcí můžeme kreslit také podle hodnot jejich parametrů - a určuje strmost, b určuje průsečík s osou y.