

2.2.6 Lineární nerovnice

Předpoklady: 2205

Pedagogická poznámka: Sestavování tabulky trvá čtvrt hodiny až 20 minut. Spočítat všechny příklady stihne tak polovina studentů. Ti nejpomalejší se dokázali dopočítat až k příkladu 3. Doporučuji dojet hodinu i s pomalejšími až do konce někdy později a ostatní nechat samostatně počítat se sbírky.

Lineární nerovnice jsou všechny rovnice, které můžeme zapsat ve tvaru $ax + b < 0$ ($ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$) (neznámá je pouze v první mocnině).

Opět využijeme podobnost s lineární funkcí.

Rozebereme pouze nerovnici ve tvaru $ax + b < 0$, ostatní možnosti lze rozebrat podobným způsobem:

Lineární nerovnice $ax + b < 0$

Hledáme, kdy je výraz $ax + b$ menší než 0.

Řešíme nerovnici:

$$ax < -b \quad / -b$$

$ax < -b$ / Chceme dělit číslem a . Jde to pouze, když $a \neq 0 \Rightarrow$ další postup záleží na znaménku čísla a .

1. Předpokládáme $a < 0$.

$$ax < -b \quad / : a \quad \text{Dělíme záporným číslem}$$

\Rightarrow obracíme znaménko.

$$x > -\frac{b}{a}$$

Řešením je interval $K = \left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$.

2. Předpokládáme $a > 0$.

$$ax < -b \quad / : a \quad \text{Dělíme kladným číslem}$$

\Rightarrow znaménko neobracíme.

$$x < -\frac{b}{a}$$

Řešením interval $K = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

3. Pokračujeme v řešení, $a = 0$.

\Rightarrow Nemůžeme vydělit rovnicí, ale víme, které konkrétní a nás zajímá \Rightarrow můžeme ho dosadit.

$$0 \cdot x < -b$$

Výsledek záleží na hodnotě b .

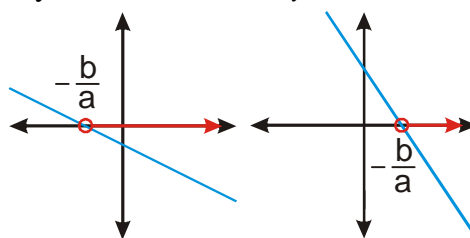
3. a) Je-li $-b > 0 \Rightarrow b < 0$, řešením

Lineární funkce $y = ax + b$

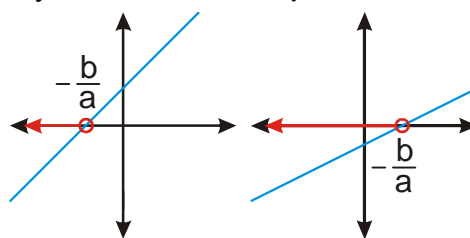
Hledáme, kdy $y < 0 \Rightarrow$ hledáme body grafu funkce, které leží pod osou x (jejich y -ová souřadnice je menší než nula).

Kreslíme graf funkce a hledáme, které části jsou pod osou x .

Grafy lineárních funkcí $y = ax + b$, $a < 0$



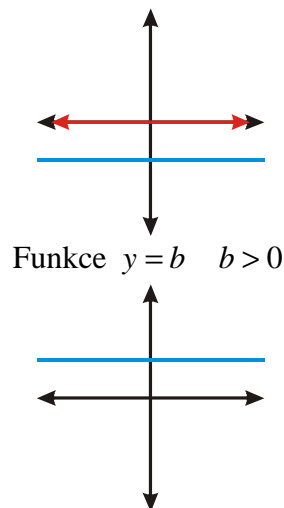
Grafy lineárních funkcí $y = ax + b$, $a > 0$



Funkce $y = b$ $b < 0$

nerovnice jsou všechna reálná čísla.

$$K = \mathbb{R}$$



3. b) Je-li $-b < 0 \Rightarrow b > 0$, nerovnice nemá řešení.

$$K = \emptyset$$

S konkrétními čísly to bude jednodušší, učit se tabulku nazpaměť je rozhodně nesmysl.

Něco na rozehtátí:

Př. 1: Vyřeš nerovnice:

a) $2x \geq 0$

b) $-3x < 0$

c) $0x \leq 2$

d) $0x \geq 0$

a) $2x \geq 0$

$$x \geq 0$$

$$K = (0; \infty)$$

c) $0x \leq 2$

$$K = \mathbb{R}$$

b) $-3x < 0$

$$x > 0$$

$$K = (0; \infty)$$

d) $0x \geq 0$

$$K = \mathbb{R}$$

Pedagogická poznámka: Studenti mají s předchozím příkladem rozhodně více problémů než s následujícím. Hlavně u bodů c) d) je potřeba, aby si situaci rozmysleli a „osahali“ dosazováním čísel za x .

U složitějších příkladů postupujeme podobně jako při řešení lineárních rovnic.

Př. 2: Vyřeš nerovnice:

a) $3x - 7 \leq 5x - 13$

c) $(x+1)^2 - (x-1)^2 + 2 \geq 2(x+1)$

e) $\frac{x+1}{4} - \frac{x-3}{3} < \frac{x+4}{6} + \frac{7-3x}{12}$

b) $3(2+x) - (x-1) < 2(x+1)$

d) $(x-2)^2 \geq (x+1)(x-5)$

a) $3x - 7 \leq 5x - 13$

$$6 \leq 2x$$

$$3 \leq x$$

$$K = [3; \infty)$$

c) $(x+1)^2 - (x-1)^2 + 2 \geq 2(x+1)$

b) $3(2+x) - (x-1) < 2(x+1)$

$$6 + 3x - x + 1 < 2x + 2$$

$$0x < -5$$

$$K = \emptyset$$

d)

$$x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) + 2 \geq 2x + 2$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 \geq 2x$$

$$4x \geq 2x$$

$$4x - 2x \geq 0$$

$$2x \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$K = \langle 0; \infty \rangle$$

$$\text{e) } \frac{x+1}{4} - \frac{x-3}{3} < \frac{x+4}{6} + \frac{7-3x}{12} \quad / \cdot 12$$

$$3(x+1) - 4(x-3) < 2(x+4) + 7 - 3x$$

$$3x + 3 - 4x + 12 < 2x + 8 + 7 - 3x$$

$$-x + 15 < -x + 15$$

$$0x < 0$$

$$K = \emptyset$$

$$(x-2)^2 \geq (x+1)(x-5)$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq x^2 - 5x + x - 5$$

$$-4x + 4 \geq -4x - 5$$

$$0x \geq -9$$

$$K = R$$

Př. 3: Vyřeš nerovnice:

a) $\sqrt{3}x + 3 \geq 2 - x$

b) $x + 3 \geq 7 + \sqrt{2}x$

a) $\sqrt{3}x + 3 \geq 2 - x$

$$x + \sqrt{3}x \geq -1$$

$$x(1 + \sqrt{3}) \geq -1$$

$$x \geq \frac{-1}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 - 3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{-2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$K = \left\langle \frac{1 - \sqrt{3}}{2}; \infty \right\rangle$$

b) $x + 3 \geq 7 + \sqrt{2}x$

$$x - \sqrt{2}x \geq 4$$

$$x(1 - \sqrt{2}) \geq 4$$

$$x \leq \frac{4}{1 - \sqrt{2}} \quad (\text{číslo } 1 - \sqrt{2} \text{ je záporné})$$

$$x \leq \frac{4}{1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2} + 1)}{1 - 2} = -4(\sqrt{2} + 1)$$

$$K = \left(-\infty; -4\sqrt{2} - 4 \right)$$

Pedagogická poznámka: Příklad je zajímavý z hlediska paměti. Problém s odmocninou, která násobí neznámou, řešili studenti u lineárních rovnic (tedy před nedávnem). Přesto si někteří vůbec nepamatovali, jak se k němu postavit. Snažím se jim vysvětlit, že stejně jako je nesmyslné učit se nazpaměť příklady, je dobré si pamatovat figle, které pomáhají řešit problémy, na které nestačíme.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $ax - b \geq 0$, pokud platí $a < 0$. Správnost početního řešení ověř graficky.

$$ax - b \geq 0 \quad /+b$$

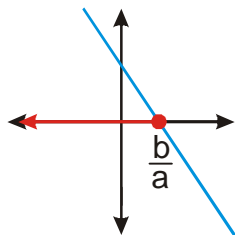
$$ax \geq b \quad /:a \quad \text{Dělíme záporným číslem} \Rightarrow \text{obracíme znaménko.}$$

$$x \leq \frac{b}{a}$$

$$K = \left(-\infty; \frac{b}{a} \right]$$

Lineární funkce $y = ax - b$, $a < 0$

Řešíme nerovnici $ax - b \geq 0 \Rightarrow$ hledáme části grafu nad osou x .



$$K = \left(-\infty; \frac{b}{a} \right]$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti neobrátní znaménko při dělení a , jiní nenakreslí graf klesající funkce. Největším problémem je ale fakt, že většina z těch, kteří udělají chybu, dojde přesto do stavu, že oběma způsoby získají stejné řešení. Obrázek zkrátka nakreslí tak, aby jim vyšlo to samé co u výpočtu.

Snažím se s tím bojovat, protože tento postup fakticky znemožňuje kontrolování.

Je potřeba, aby se studenti naučili v podobných situacích „zapomenout“, k jakému výsledku došli a počítali druhým způsobem zcela od začátku.

Hodně to souvisí s tím, že studenti jenom částečně postupují podle pravidel.

Nemají zažitě, že pravidla jsou striktní a musí se dodržovat za všech okolností.

Př. 5: Petáková:
strana 12/cvičení 1 f) g)

Shrnutí: Řešení lineárních nerovnic je hodně podobné řešení rovnic až na obracení znaménka při násobení (dělení) záporným číslem. Větší pozornost vyžaduje závěrečná interpretace výsledku do množiny všech řešení.