2.2.12 Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice III

Předpoklady: 2211

Pedagogická poznámka: Většina příkladů z této hodiny patří do skupiny příkladů na společnou práci. Termín nezavádím. Existují příklady, kde spolu lidé společně pracují, a řeší se úplně jinak. Většina studentů není schopná první příklad samostatně vyřešit (i když se takové příklady na základní škole učili) a tak ho počítáme po chvilce na rozmyšlenou společně na tabuli.

Př. 1: Jeden kopáč by vykopal příkop pro telefonní vedení za 6 hodin. Druhý by vykopal tentýž příkop za 3 hodiny. Jak dlouho by jim vykopání příkopu trvalo, kdyby pracovali společně?

Doba na vykopání příkopu … x

Základní fígl na příklady, které se zabývají splněním úkolu:

1. kopáč vykope vše za 6h $\Rightarrow$ za 1h vykope $\frac{1}{6}$ práce.

2. kopáč vykope vše za 3h $\Rightarrow$ za 1 h vykope $\frac{1}{3}$ práce.

1. kopáč vykope za x hodin: $x\left(\frac{1}{6}\right)$ práce.

2. kopáč vykope za x hodin: $x\left(\frac{1}{3}\right)$ práce.

Práce, kterou vykoná 1 kopáč, + práce, kterou vykoná 2 kopáč, je celá práce:

$$x\left(\frac{1}{6}\right)+x\left(\frac{1}{3}\right)=1 \quad /\cdot 6$$

$$x+2x=6$$

$$3x=6$$

Oba kopáči spolu vedení vykopou za 2 hodiny.

Př. 2: Rybník se vypustí větším stavidlem za 10 dní, menším za 12 dní. Letos jej vypouštěli tak, že první čtyři dny otevřeli jen větší stavidlo, teprve pak otevřeli také stavidlo menší. Urči dobu, kterou trvalo vypouštění rybníku letos.

Větším stavidlem 10 dní $\Rightarrow$ za 1 den vypustí $\frac{1}{10}$ rybníka.

Menším stavidlem12 dní $\Rightarrow$ za 1 den vypustí $\frac{1}{12}$ rybníka.

Doba, po kterou je otevřeno větší stavidlo … x.

Část rybníka vypuštěná větším stavidlem + část vypuštěná menším stavidlem = celý rybník:

$$x\left(\frac{1}{10}\right)+(x-4)\left(\frac{1}{12}\right)=1 \quad /\cdot 60$$ (menší stavidlo se otevře až čtyři dny po velkém).

$6x+(x-4)5=60$
$6x+5x-20=60$
$11x=80$
$x=\frac{80}{11}\doteq 7,27$

Jiné řešení:

Nejdříve bylo 4 dny otevřené větší stavidlo $\Rightarrow$ vypustilo: $4\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ rybníka $\Rightarrow$ zbývá vypustit $\frac{3}{5}$ objemu rybníka.

Obě stavidla vypustí za 1 den: $\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{11}{60}$ objemu.

$\frac{11}{60}$ práce … 1 den
$\frac{3}{5}$ práce … x dní

$\frac{x}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{11}{60}}\Rightarrow x=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{11}{60}}=\frac{3\cdot 60}{5\cdot 11}=3,\overline{27}$ dní

Musíme však přičíst 4 dny, po které bylo otevřeno první stavidlo: $3,\overline{27}+4=7,27$ dní.
Rybník se vypustí přibližně za 7, 27 dne.

Pedagogická poznámka: Správně je také rovnice $(x+4)\left(\frac{1}{10}\right)+x\left(\frac{1}{12}\right)=1$. Určíme tak čas, po který bylo otevřeno menší stavidlo, a k výsledku musíme přičíst čtyřku, abychom odpověděli na dotaz v zadání.
Často se objevuje i rovnice: $4\frac{1}{10}+x\left(\frac{1}{10}\right)+x\left(\frac{1}{12}\right)=1$. Je dobré si rovnice napsat na tabuli a zkusit si je všechny přečíst, aby studenti viděli, že jde stále o naplnění stejné základní myšlenky, kdy části vypuštěné jednotlivými stavidly musí dohromady dát celý rybník.
Překvapilo mě, kolik studentů dokázalo příklad samostatně spočítat.

Př. 3: Mistr společně s učedníkem postaví zeď za 20 hodin. Mistr sám by tuto práci vykonal za 30 hodin. Jak dlouho by zeď stavěl samotný učedník?

Mistr	30 hodin	$\Rightarrow$	za 1 hodinu	$\frac{1}{30}$ práce.
Oba dva	20 hodin	$\Rightarrow$	za 1 hodinu	$\frac{1}{20}$ práce.
Učedník	x hodin	$\Rightarrow$	za 1 hodinu	$\frac{1}{x}$ práce.

Část udělaná za 1 hodinu mistrem + část udělaná za 1 hodinu učedníkem = část udělaná za 1 hodinu dohromady: $\frac{1}{30}+\frac{1}{x}=\frac{1}{20} \quad / \cdot 60x$.

$2x+60=3x$

$x=60$

Jiný postup řešení:

Práce udělaná mistrem + práce udělaná učedníkem = celá práce.

$20\left(\frac{1}{30}\right)+20\left(\frac{1}{x}\right)=1 \quad / \cdot 30x$ (oba pracují 20 hodin)

$20x+600=30x$

$10x=600$

$x=60$

Samotný učedník by zeď postavil za 60 hodin.

Pedagogická poznámka: Řešení tohoto příklad dopadá naopak katastrofálně. I když jde o stejný příklad jako 1 (pouze neznáme jinou veličinu) studenti nejsou schopni rovnici sestavit.
Mám pocit, že problém spočívá v tom, že studenti se hlavně snaží vyřešit příklad a méně už popsat rovnicí realitu. Snažím se jim vysvětlit, že největší přínos proměnné tkví v tom, že nám umožňuje popsat rovnicí skutečnost i v případech, kdy neznáme její hodnotu. Jakmile přistupujeme k příkladu tímto způsobem není mezi ním a prvním příkladem rozdíl, neznámá se pouze vyskytuje na jiném místě.

Př. 4: Při stavbě přehrady je nutné dočasně přehradit kamením a zeminou tok řeky. Přehrazení se provádí tak, že se najednou z obou stran koryta staví proti sobě hráze, které se setkají uprostřed řeky. Na jedné straně řeky jsou vhodnější podmínky, proto by přehrazení celého koryta z této strany trvalo 30 hodin. Z druhé strany je stavba obtížnější, proto by odtud přehrazení celé řeky trvalo 40 hodin. Situaci ještě komplikuje fakt, že řeka materiál odnáší a v případě, že by se stavba v polovině zastavila, řeka by veškerý navezený materiál do 30 hodin odnesla. Jak dlouho by přehrazení z obou stran trvalo, pokud se práce na výhodnějším břehu zpozdily a začaly až pět hodin po začátku prací na druhém břehu?

Lepší strana 30 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{30}$ přehrady.

Horší strana 40 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{40}$ přehrady.

Řeka by za 30 hodin rozebrala polovinu přehrady $\Rightarrow$ celou přehradu by rozbila za 60 hodin (fakticky je to nesmysl, protože ve chvíli, kdy je přehrada dokončena, přestane přetékat přes její kraje a odnášet materiál).

Řeka 60 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{60}$ přehrady (řeka přehradu rozbíjí $\Rightarrow$ musíme její příspěvek odečítat).

Doba stavby přehrady od začátku na horším konci … x

Část přehrady postavená z horšího konce + část postavená z lepšího konce = celá přehrada + materiál odnesený vodou během stavby: $x\frac{1}{40}+(x-5)\frac{1}{30}=1+x\frac{1}{60} \quad / \cdot 120$.

$3x+4(x-5)=120+2x$

$3x+4x-20=120+2x$
$5x=140$
$x=28$
Stavba přehrady trvala od zahájení prací 28 hodin.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je jednoduchý za předpokladu, že při výpočtu sledujeme postup stavby. Většina studentů ho opět nedokázala vyřešit.

Na závěr něco na nerovnice:

Př. 5: Pavlovi zvýšili od nového roku plat o 3600 Kč. Evě zvýšili plat pouze o 3% a přesto bylo její zvýšení větší než Pavlovo. Jaký je Evin plat?

Pavlovo zvýšení platu: 3600 Kč
Evin plat: x
Evino zvýšení platu: $0{,}03x$
$0{,}03x>3600$
$x>\frac{3600}{0{,}03}=120000$
Eva pobírá plat vyšší než 120 000 Kč měsíčně.

Poznámka: Rád bych upozornil na fakt, že předchozí příklad je genderově vyvážený a boří zažité představy o nižších výdělcích zaměstnaných žen.

Pedagogická poznámka: Je až šokující, jak velké problémy některým studentům příklad působil. Zřejmě předpokládali, že půjde o podobný příklad s předchozími. Nejdůležitější je přesvědčit, že z něj nemají dělat žádnou vědu a pouze srovnat, kolik dostal přidáno Pavel a kolik Eva. Většina z nich se však více než zadáním zabývá svoji představou o příkladu a snaží se do porovnání zahrnout původní Pavlův plat, o kterém nejsou v zadání žádné informace.

Př. 6: Hnědé uhlí s odvozem stojí u místní firmy 260 Kč za metrák. Ve velkoobchodě vzdáleném 20 km je cena stejného uhlí pouze 230 Kč za metrák. Pronájem nákladního automobilu na odvoz uhlí z velkoobchodu vyjde na 1200 Kč. Od jakého minimálního množství uhlí se vyplatí nakupovat ve velkoobchodě?

Množství uhlí: … x
Cena za uhlí v místě: … $260x$
Cena za uhlí z velkoobchodu: … $230x+1200$
$230x+1200<260x$
$1200<30x$
$x>40$
Nákup ve velkoobchodu se vyplatí, pokud kupujeme více než 40 metráků uhlí.

Na závěr si shrneme zkušenosti z posledních tří hodin:
Ukázali jsme si, že pomocí slovních úloh (a předtím třeba lineárních funkcí) je možné spočítat občas zcela nesmyslné, ale někdy i užitečné údaje. Právě v tom tkví okamžitá užitečnost matematiky.
Řešení všech slovních úloh mělo jedno společné:

- Nejdříve jsme museli (pokaždé jinak) sestavit podle zadání nějaké rovnice. V této činnosti jsme často selhávali a dělali naprostou většinu chyb.
- Vyřešení sestavené rovnice naopak bylo zcela rutinní záležitostí, při které stačilo dodržovat několik málo pravidel a měli jsme jistotu správného výsledku.

Právě v tom tkví užitečnost rovnic. Jakmile je získáme, nemusíme se příliš strachovat o výsledek. Úspěch zajistí pouhé dodržování matematických pravidel.

Př. 7: Petáková:
strana 19/cvičení 47
strana 19/cvičení 53
strana 19/cvičení 54

Shrnutí: Velkou část úloh o společné práci můžeme řešit pomocí části práce, kterou je možné vykonat za jednotku času.