2.3.15 Soustavy více rovnic o více neznámých III

Předpoklady: 2314

Př. 1: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic $\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+z=4 \\ y+z=5 \end{array}$.

Soustavu budeme zapisovat tak, aby stejné proměnné byly pod sebou:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & & =3 \\ x & & & + & z=4 \\ & & y & + & z=5 \end{array}$$

likvidujeme x v 2. rovnici (ve třetí už není)

$$\begin{array}{lrcl} & x+y & & =3 \\ [\![1]\!]-[\![2]\!] & y & - & z=1 \\ & y & + & z=5 \end{array}$$

likvidujeme z v 3. rovnici

$$\begin{array}{lrcl} & x+y & & =3 \\ & y & - & z=-1 \\ [\![2]\!]+[\![3]\!] & 2y & & =4 \end{array}$$

Máme trojúhelníkový tvar:

$y=2$

dopočítáme z: $y-z=-1 \Rightarrow 2-z=-1 \Rightarrow z=3$

dopočítáme x: $x+y=3 \Rightarrow x+2=3 \Rightarrow x=1$

$K=\{[1;2;3]\}$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu mají někdy studenti problémy s tím, že v počátečním tvaru soustavy už některé neznámé chybí. Jde o to, aby pochopili, že to není problém, ale naopak výhoda.
Při zápisu opět trvám na tom, aby zapisovali stejné neznámé pod sebe i za cenu toho, že v soustavě zůstanou „volná místa“.

Př. 2: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic $\begin{array}{r} a+b+c+d=1 \\ a-b+2c+d=3 \\ 2a+2b+c+d=1 \\ a-b-c-d=1 \end{array}$.

Pořadí rovnic nebudeme měnit, první rovnice je nejjednodušší.

1. krok likvidace *a*

$$\begin{array}{ll} & a+b-c+d=1 \\ [\![1]\!]-[\![2]\!] & 2b-3c \quad =-2 \\ 2\cdot[\![1]\!]-[\![3]\!] & -3c+d=1 \\ [\![1]\!]-[\![4]\!] & 2b \quad +2d=0 \end{array}$$

Třetí rovnice už neobsahuje ani a, ani b $\Rightarrow$ při odstraňování b ji stačí opsat

2. krok likvidace *b*

$$\begin{array}{ll} & a+b-c+d=1 \\ & 2b-3c \quad =-2 \\ & -3c+d=1 \\ [\![4]\!]-[\![2]\!] & 3c+2d=2 \end{array}$$

3. krok likvidace *c*

$$\begin{array}{ll} & a+b-c+d=1 \\ & 2b-3c \quad =-2 \\ & -3c+d=1 \\ [\![4]\!]+[\![3]\!] & 3d=3 \end{array}$$

$d=1$

Dopočítáme ostatní proměnné:

$-3c+d=1 \Rightarrow -3c+1=1 \Rightarrow c=0$

$2b-3c=-2 \Rightarrow 2b-3\cdot 0=-2 \Rightarrow b=-1$

$a+b-c+d=1 \Rightarrow a-1+0+1=1 \Rightarrow a=1$

$K=\{[1;-1;0;1]\}$

Př. 3: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic $\begin{array}{r} a+b+c+d=8 \\ a-2b-c+2d=4 \\ 2a+b+c+3d=17 \\ 3a+2b-c+d=10 \end{array}$.

Jednotlivé kroky při řešení zapisuj pod sebe na jednu stranu sešitu tak, aby v jeho druhé polovině bylo místo pro další podobný příklad.

Pořadí rovnic nebudeme měnit, první rovnice je nejjednodušší.

1. krok likvidace *a*

$$\begin{array}{ll} & a+b+c+d=8 \\ [\![1]\!]-[\![2]\!] & 3b+2c-d=4 \\ 2\cdot[\![1]\!]-[\![3]\!] & b+c-d=-1 \\ 3\cdot[\![1]\!]-[\![4]\!] & b+4c+2d=14 \end{array}$$

Druhou rovnici budeme používat k přičítání v dalším kroku, proto je výhodné prohodit pořadí druhé a třetí rovnice, aby se na druhém místě objevila jednodušší rovnice.

$$\begin{array}{r} a+b+c+d=8 \\ b+c-d=-1 \\ 3b+2c-d=4 \\ b+4c+2d=14 \end{array}$$

2. krok likvidace *b*

$$
\begin{array}{ll}
 & a+b+c+d=8 \\
 & b+c-d=-1 \\
3\cdot[\![2]\!]-[\![3]\!] & c-2d=-7 \\
[\![4]\!]-[\![2]\!] & 3c+3d=15 \quad /:3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b+c+d&=8 \\
b+c-d&=-1 \\
c-2d&=-7 \\
c+d&=5
\end{aligned}
$$

3. krok likvidace *c*

$$
\begin{array}{ll}
 & a+b+c+d=8 \\
 & b+c-d=-1 \\
 & c-2d=-7 \\
[\![4]\!]-[\![3]\!] & 3d=12 \quad /:3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b+c+d&=8 \\
b+c-d&=-1 \\
c-2d&=-7 \\
d&=4
\end{aligned}
$$

Dopočítáme ostatní proměnné:

$c-2d=-7 \Rightarrow c-2\cdot 4=-7 \Rightarrow c=1$

$b+c-d=-1 \Rightarrow b+1-4=-1 \Rightarrow b=2$

$a+b+c+d=8 \Rightarrow a+2+1+4=8 \Rightarrow a=1$

$K=\{[1;2;1;4]\}$

Poznámka: Na první pohled vypadá Gaussova eliminační metoda těžkopádně a mnohdy se zdá, že by bylo možné „vynulovat“ koeficienty v řádcích rychleji. Zkusíme to na našem příkladu:

$$
\begin{aligned}
a+b+c+d&=8 \\
a-2b-c+2d&=4 \\
2a+b+c+3d&=17 \\
3a+2b-c+d&=10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & a+b+c+d=8 \\
[\![2]\!]-[\![1]\!] & -3b-2c+d=-4 \\
[\![3]\!]-[\![1]\!] & a \qquad +2d=9 \\
[\![4]\!]-[\![1]\!] & 2a+b-2c \qquad =2
\end{array}
$$

Hned v prvním kroku jsme vyrobili o jednu nulou více. Pokud bychom se však pokusili ve třetí rovnici získat jedinou proměnnou (zlikvidovat *a* nebo *d*) opět bychom si do rovnice zavlekli *b* a *c*, protože ostatní rovnice je stále obsahují.
Volnější postupy nejsou vyloučeny, ale zvláště ve složitějších příkladech vyžadují dobrou orientaci a odhad situace. Gaussova eliminační metoda je jistota, která po malém počtu kroků vede k řešení.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je poměrně extrémní. Utěšuju studenty, že horší už to nebude. V nejhorším případě mohou použít kalkulačku.

Př. 4: Vyřeš pomocí Gaussovy eliminační metody soustavu rovnic $\begin{aligned} 3x-4y+5z&=1\\ 4x+5y-3z&=1\\ 5x-4y+4z&=1 \end{aligned}$.

$$\begin{aligned} 3x-4y+5z&=1\\ 4x+5y-3z&=1\\ 5x-4y+4z&=1 \end{aligned}$$

likvidujeme *x* v 2. a 3. rovnici

$$\begin{aligned} & 3x-4y+5z=1\\ 4[\![1]\!]-3[\![2]\!] \quad & -31y+29z=1\\ 5[\![1]\!]-3[\![2]\!] \quad & -8y+13z=2 \end{aligned}$$

Prohodíme druhou a třetí rovnici:

$$\begin{aligned} 3x-4y+5z&=1\\ -8y+13z&=2\\ -31y+29z&=1 \end{aligned}$$

likvidujeme *y* ve třetí rovnici

$$\begin{aligned} & 3x-4y+5z=1\\ & -8y+13z=2\\ 31[\![2]\!]-8[\![3]\!] \quad & 171z=54 \end{aligned}$$

$z=\frac{54}{171}=\frac{6}{19}$

Dopočítáme *y*: $8y=13z-2=13\frac{6}{19}-2=\frac{40}{19} \Rightarrow y=\frac{5}{19}$

Dopočítáme *x*: $3x=1-5z+4y=1-5\cdot\frac{6}{19}+4\cdot\frac{5}{19}=\frac{9}{19} \Rightarrow x=\frac{3}{19}$

$K=\left\{\left[\frac{3}{19};\frac{5}{19};\frac{6}{19}\right]\right\}$

Pedagogická poznámka: Pokud předcházející příklady někomu na zaplnění hodiny nestačí, má k dispozici sbírku.

Př. 5: Petáková:
strana 16/cvičení 31 c) e) f)

Shrnutí: Soustavu rovnic můžeme převést do trojúhelníkového tvaru postupnou likvidací proměnných sčítáním vhodných násobků rovnic mezi sebou.