

2.3.19 Grafické řešení soustav lineárních rovnic a nerovnic

Předpoklady: 2307, 2311

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$. Pokud se také o grafické řešení.

Tak jednoduchou soustavu už jsme dlouho neměli:

$$\begin{array}{r} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \\ \hline x + y = 4 \\ \text{[[1]]} + \text{[[2]]} \quad 3x = 9 \\ \hline x = 3 \end{array}$$

Dosadíme do první rovnice: $x + y = 4 \Rightarrow 3 + y = 4 \Rightarrow y = 1$

$$K = \{3; 1\}$$

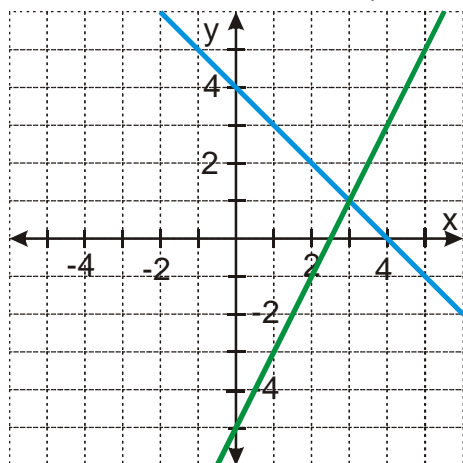
V nadpisu je ale grafické řešení. Jak graficky?

Každá rovnice – nekonečně mnoho řešení (uspořádaných dvojic čísel, kreslili jsme je jako grafy funkcí).

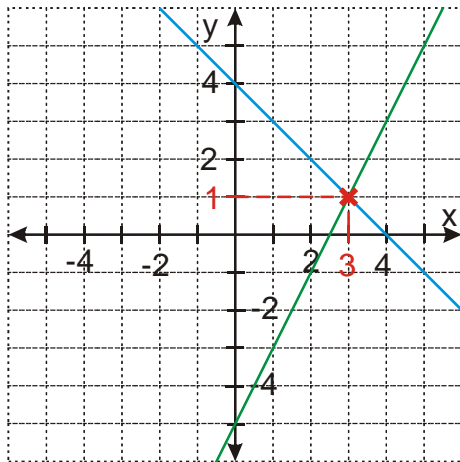
Řešení soustavy = řešení (dvojice), které je společné.

Řešení první rovnice : $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$ - nakreslíme funkci $y = 4 - x$

Řešení druhé rovnice : $2x - y = 5 \Rightarrow y = 2x - 5$ - nakreslíme funkci $y = 2x - 5$



Společné řešení = místo, kde se přímky protínají.



Řešením soustavy jsou souřadnice průsečíku obou přímek (bod $[3;1]$) $\Rightarrow K = \{[3;1]\}$.

Pedagogická poznámka: Grafické řešení není součástí předchozího příkladu schválně. Jen málokdy někdo objeví tento postup v únosné formě. Přesto se vyplatí nechat rychlejší alespoň chvíli na to, aby se o grafické řešení pokusili. Každopádně se musí provést pro celou třídu na tabuli.

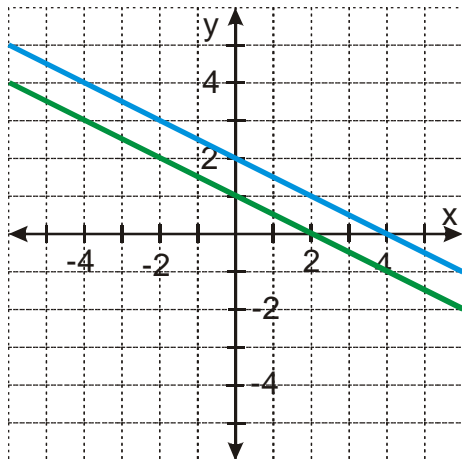
Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $x + 2y = 4$
 $2x + 4y = 4$. Soustavu nejdříve vyřeš početně, poté odhadni jaké bude grafické řešení a nakonec svůj odhad ověř sestrojením grafického řešení.

$$\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 4 \quad /:2 \\ \hline x + 2y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{array} \Rightarrow \text{podmínky v obou rovnicích si odporují, nemusíme dál pokračovat, soustava nemá řešení}$$

Soustava nemá řešení \Rightarrow na obrázku by neměl být žádný průsečík \Rightarrow oba grafy budou zřejmě rovnoběžné přímky

Řešení první rovnice : $x + 2y = 4 \Rightarrow y = 2 - \frac{x}{2}$ - nakreslím funkci $y = 2 - \frac{x}{2}$

Řešení druhé rovnice : $2x + 4y = 4 \Rightarrow y = 1 - \frac{x}{2}$ - nakreslím funkci $y = 1 - \frac{x}{2}$



Přímky se neprotínají \Rightarrow soustava nemá řešení.

$$K = \emptyset$$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$. Soustavu nejdříve vyřeš početně, poté odhadni jaké bude grafické řešení a nakonec svůj odhad ověř sestrojením grafického řešení.

$$\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \quad /:2 \\ \hline 2x - y = 1 \end{array}$$

$2x - y = 1 \Rightarrow$ podmínky jsou v obou rovnicích stejné \Rightarrow fakticky jde o jedinou rovnici se

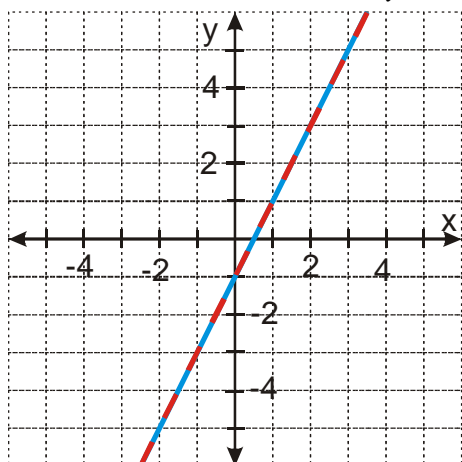
dvěma neznámými \Rightarrow nekonečně mnoho řešení
volíme x , dopočítáváme y : $y = 2x - 1$

$$K = \{[x; 2x - 1], x \in R\}$$

\Rightarrow na obrázku budou dvě totožné přímky

Řešení první rovnice : $2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1$ - nakreslíme funkci $y = 2x - 1$

Řešení druhé rovnice : $4x - 2y = 2 \Rightarrow y = 2x - 1$ - nakreslíme funkci $y = 2x - 1$



Přímky jsou totožné \Rightarrow řešením soustavy je každý jejich bod.

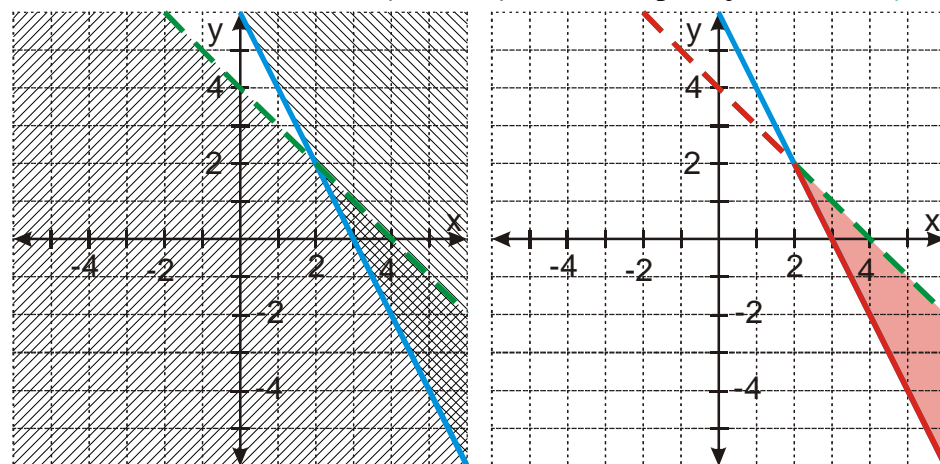
$$K = \{[x; 2x - 1]; x \in R\}$$

Př. 4: Vyřeš graficky soustavu nerovnic
$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ x + y < 4 \end{cases}$$

Stejně jako u rovnic, zobrazíme každou zvlášť, řešením jsou společné body.

Řešení první nerovnice : $2x + y \geq 6 \Rightarrow y \geq 6 - 2x$ - použijeme funkci $y = 6 - 2x$

Řešení druhé nerovnice : $x + y < 4 \Rightarrow y < 4 - x$ - použijeme funkci $y = 4 - x$



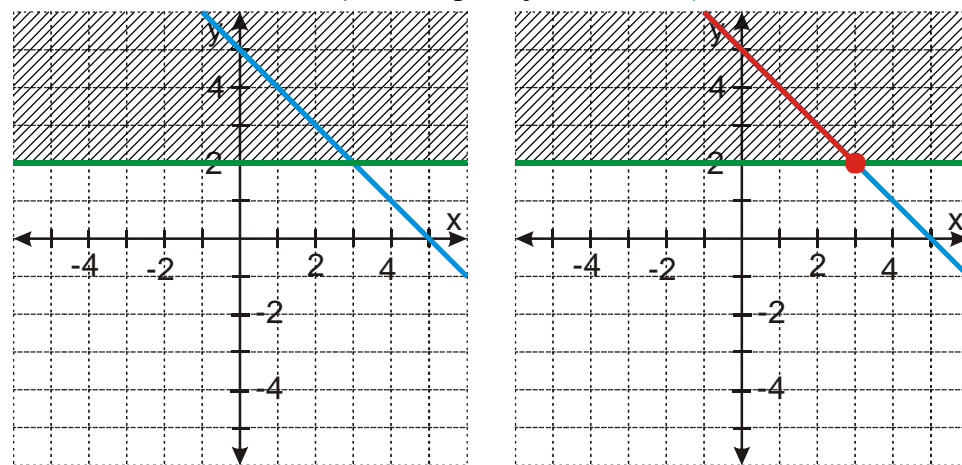
Pedagogická poznámka: Největším problémem při řešení příkladu není ani tak příklad sám, jako fakt, že plocha průniku je poměrně malá a grafy funkcí se od sebe příliš neliší. Pokud pak studenti nekreslí příliš pečlivě nebo mají příliš malý obrázek, stává se, že se nedokáží zorientovat. Pro mě je to záměr a chci, aby obrázek, když mají problémy, předělali do stavu, ze kterého je možné něco zjistit.

Př. 5: Vyřeš graficky soustavu rovnice a nerovnice
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Úplně stejný postup jako předtím.

Řešení první rovnice : $x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$ - použijeme funkci $y = 5 - x$

Řešení druhé nerovnice : $y \geq 2$ - použijeme funkci $y = 2$



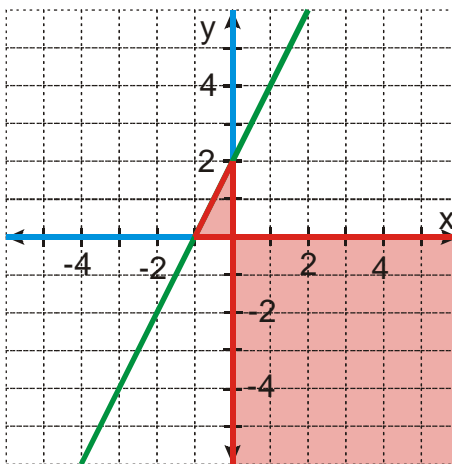
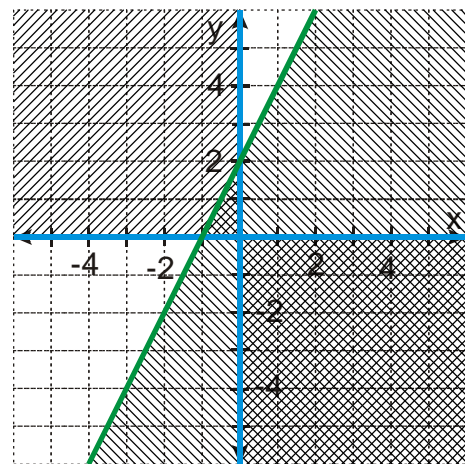
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad testuje, zda se studenti drží více pravidla o průniku, nebo „pravidla“, že se vždycky musí vyšrafovat nějaká plocha.

Hodina se zvrhává v kreslení obrázků:

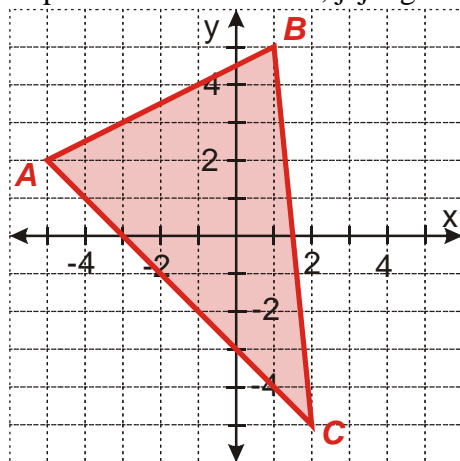
Př. 6: Vyřeš graficky soustavu nerovnic $xy \leq 0$
 $2x - y \geq -2$.

Řešení první nerovnice : nejde o lineární funkci \Rightarrow musíme jinak, $xy \leq 0 \Rightarrow$ hledáme body, jejichž souřadnice nemají stejná znaménka (aby součin souřadnic byl záporný) \Rightarrow vybarvíme druhý a čtvrtý kvadrant včetně os.

Řešení druhé nerovnice : $2x - y \geq -2 \Rightarrow y \leq 2x + 2$ - použiju funkci $y = 2x + 2$



Př. 7: Napiš soustavu nerovnic, jejíž grafickým řešením je trojúhelník na obrázku.



Obrácený postup než předtím.

Každá ze stran trojúhelníka se dá vyjádřit pomocí lineární funkce. Z nich určíme odpovídající lineární nerovnice se dvěma neznámými.

Strana AB

Souřadnice $A[-5; 2]$, $B[1; 5]$.

Dosadíme do předpisu lineární funkce: $y = ax + b$

Bod $A[-5; 2] \Rightarrow 2 = a(-5) + b$

Bod $B[1; 5] \Rightarrow 5 = a \cdot 1 + b$

Řeším soustavu:

$$\begin{array}{r} -5a+b=2 \\ \underline{a+b=5} \\ \quad \quad \quad a+b=5 \\ \quad \quad \quad \underline{[[2]]-[[1]]} \quad 6a=3 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \end{array}$$

Vypočteme b : $a+b=5 \Rightarrow \frac{1}{2}+b=5 \Rightarrow b=\frac{9}{2}$

Získáváme funkci: $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \Rightarrow 2y=x+9$

Rovnice přímky AB : $2y=x+9$

Do trojúhelníku patří i body pod touto přímkou: $2y \leq x+9$

Po úpravě $x-2y+9 \geq 0$.

Strana BC

Souřadnice $B[1;5]$, $C[2;-5]$.

Dosadíme do předpisu lineární funkce: $y=ax+b$

Bod $B[1;5] \Rightarrow 5=a \cdot 1+b$

Bod $C[2;-5] \Rightarrow -5=a \cdot 2+b$

Řešíme soustavu:

$$\begin{array}{r} a+b=5 \\ \underline{2a+b=-5} \\ \quad \quad \quad a+b=5 \\ \quad \quad \quad \underline{[[2]]-[[1]]} \quad a=-10 \Rightarrow a=-10 \end{array}$$

Vypočteme b : $a+b=5 \Rightarrow -10+b=5 \Rightarrow b=15$

Získáváme funkci: $y=-10x+15$

Rovnice přímky BC : $y=-10x+15$

Do trojúhelníku patří i body pod touto přímkou: $y \leq -10x+15$

Po úpravě $10x+y-15 \leq 0$.

Strana AC

Souřadnice $A[-5;2]$, $C[2;-5]$.

Dosadíme do předpisu lineární funkce: $y=ax+b$

Bod $A[-5;2] \Rightarrow 2=a(-5)+b$

Bod $C[2;-5] \Rightarrow -5=a \cdot 2+b$

Řešíme soustavu:

$$\begin{array}{r} -5a+b=2 \\ \underline{2a+b=-5} \\ \quad \quad \quad -5a+b=2 \\ \quad \quad \quad \underline{[[2]]-[[1]]} \quad 7a=-7 \Rightarrow a=-1 \end{array}$$

Vypočteme b : $-5a+b=2 \Rightarrow -5(-1)+b=2 \Rightarrow b=3$

Získáváme funkci: $y=-x-3$

Rovnice přímky AC : $y=-x-3$

Do trojúhelníku patří i body nad touto přímkou: $y \geq -x-3$

Po úpravě $x+y+3 \geq 0$.

Trojúhelník na obrázku je grafickým řešením soustavy tří nerovnic:

$$x - 2y + 9 \geq 0$$

$$10x + y - 15 \leq 0$$

$$x + y + 3 \geq 0$$

Př. 8: Petáková:
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)

Shrnutí: