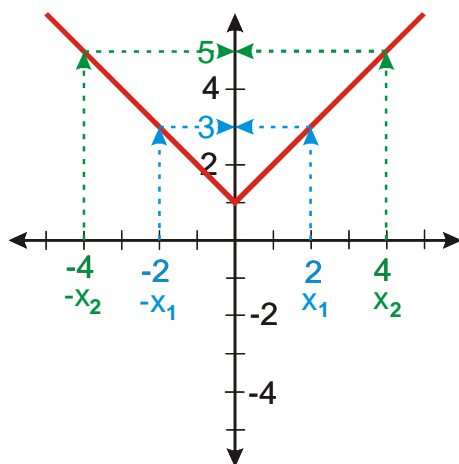


## 2.4.6 Sudé a liché funkce

Předpoklady: 2203, 2402

**Pedagogická poznámka:** Tato hodina patří mezi ty, ve kterých se toho moc nestihne. Pokud si však studenti mají nakreslit obrázky sami, není jiná možnost.

**Př. 1:** Nakresli vedle sebe grafy funkcí:  $y_1 = |x| + 1$ ,  $y_2 = 2x$ ,  $y_3 = |x + 2|$ . S pomocí nakreslených grafů prozkoumej, jakým způsobem souvisí hodnoty těchto funkcí pro navzájem opačná čísla.



Hodnoty navzájem opačných čísel jsou shodné.

Jde o speciální vlastnost. Jak se jmenuje?

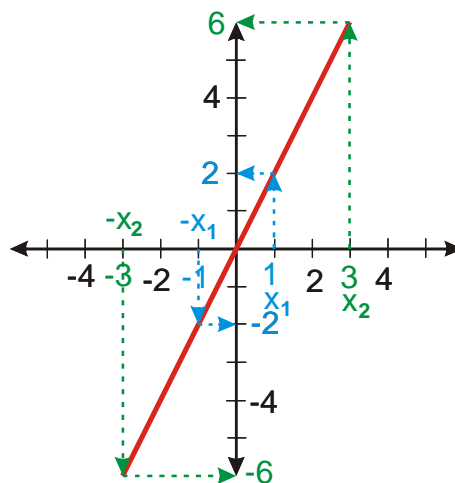
Funkce  $y_1 = |x| + 1$  se nazývá **sudá funkce**.

Graf je souměrný podle osy  $y$ .

Jak sestavit definici? Zapiš vlastnost v první řádce pod grafem pomocí  $f(x)$  a  $f(-x)$ .

$$f(x) = f(-x)$$

Celá definice:



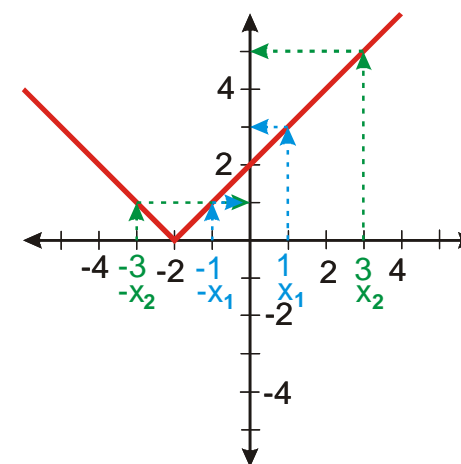
Hodnoty navzájem opačných čísel jsou čísla navzájem opačná.

Funkce  $y_2 = 2x$  se nazývá **lichá funkce**.

Jak poznáme z grafu?

Graf je středově souměrný podle počátku (bod  $[0; 0]$ ).

$$f(x) = -f(-x)$$



Mezi hodnotami navzájem opačných čísel není žádný viditelný vztah.

Nemá vlastnost, nemá žádné speciální pojmenování.

Funkce  $f(x)$  se nazývá sudá, právě když najednou platí:

1) je-li  $x \in D(f)$  je také  $-x \in D(f)$

2) pro každé  $x \in D(f)$  platí  $f(x) = f(-x)$

Dokaž z definice pro uvedené funkce, že mají uvedené vlastnosti

Bod 1) – jasné  $D(f) = R$ , pro každé  $x$  najdeme číslo

opačné

Bod 2) máme  $x, -x$ , chceme  $f(x) = f(-x)$ .

Dosadíme za  $f(x) = |x| + 1$ ,  $f(-x) = |-x| + 1$ .

Napíšeme rovnost a upravujeme než bude zřejmá:

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x) = |x| + 1 = |-x| + 1 = f(-x)$$

$$|x| + 1 = |(-1)x| + 1$$

$$|x| + 1 = |(-1)||x| + 1$$

$$|x| + 1 = 1|x| + 1$$

$|x| + 1 = 1|x| + 1$  - rovnost platí.  $\Rightarrow$  funkce je sudá

Kde se vzalo pojmenování? – Uvidíme, ale logiku to má.

Funkce  $f(x)$  se nazývá lichá, právě když najednou platí:

1) je-li  $x \in D(f)$  je také  $-x \in D(f)$

2) pro každé  $x \in D(f)$  platí  $f(x) = -f(-x)$

Bod 1) – jasné  $D(f) = R$ , pro každé  $x$  najdeme číslo

opačné

Bod 2) máme  $x, -x$ , chceme  $f(x) = -f(-x)$ .

Dosadíme za  $f(x) = 2x$ ,  $f(-x) = 2(-x)$ .

Napíšeme rovnost a upravujeme než bude zřejmá:

$$f(x) = -f(-x)$$

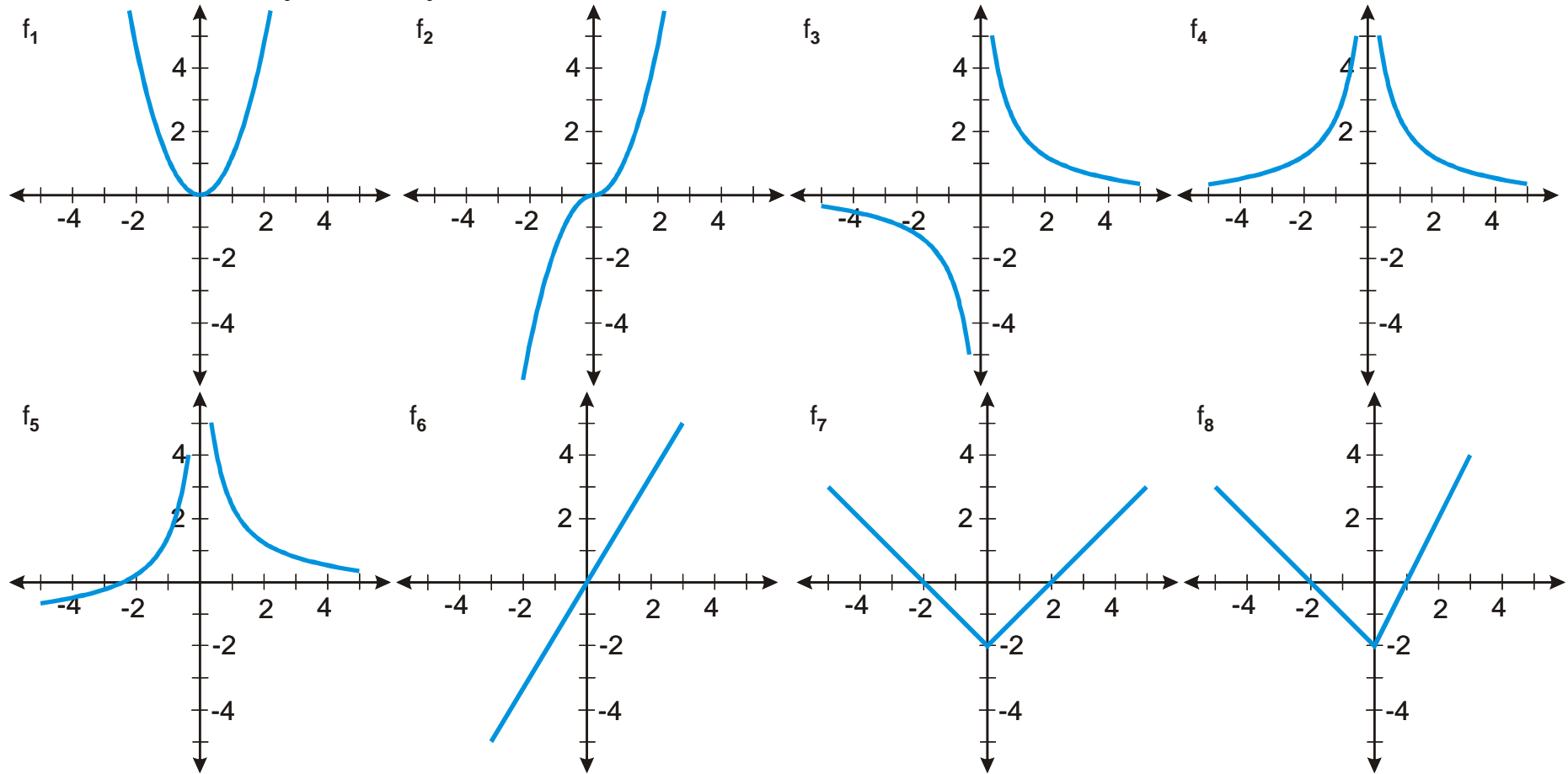
$$f(x) = 2x = -2(-x) = -f(-x)$$

$$2x = -2(-x)$$

$2x = 2x$  - rovnost platí  $\Rightarrow$  funkce je lichá

**Pedagogická poznámka:** Nechám studenty namalovat grafy (jejich kreslení je možné pojmut jako zkoušení na znamínka) a snažím se je donutit k tomu, aby začali zkoumat souvislost hodnot opačných čísel. Většinou třídy je však po chvíli nutné ukázat, co si pod tím mají představit. Obě vlastnosti si pojmenujeme, studenti samostatně vymyslí poznávací znamení z grafů. Zápis definice si ukážeme pro lichou funkci, pro sudou ji mají napsat studenti samostatně (pokud si neukážete zápisy rovnosti  $f(x) = -f(-x)$  je tento postup lepší, protože uvedená rovnost je pro studenty dost náročná). Důkaz vlastnosti si ukážeme pro sudou, samostatný důkaz pro lichou funkci zůstává pro dobrovolníky nebo na konec hodiny.

**Př. 2:** Rozhodni, které z následujících funkcí jsou sudé nebo liché.



Sudé jsou funkce:  $f_1; f_4; f_7$ .

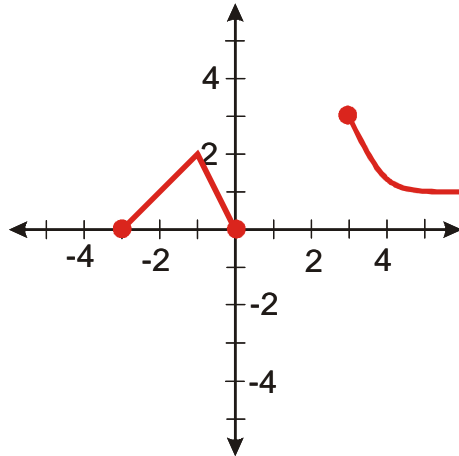
Liché jsou funkce:  $f_2; f_3; f_6$ .

**Pedagogická poznámka:** Při řešení předchozího příkladu chodím po třídě a s některými studenty diskutuji o tom, co je pro jejich obrázek důležité a co by mohli kvůli rychlosti vynechat. Obecně často platí, že ti, kteří by nejvíce potřebovali pracovat samostatně, kreslí všechno velice pečlivě, aby stihli pouze opsat správné řešení z projektoru.

**Př. 3:** Existuje funkce, která je lichá i sudá zároveň?

Ano, jde o funkci  $y = 0$ .

**Př. 4:** Doplň graf funkce tak, aby byla: a) sudá b) lichá.

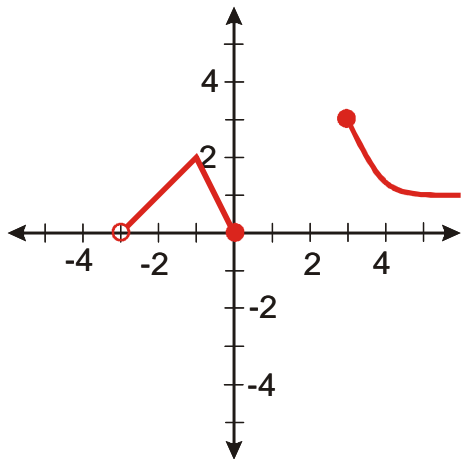


Příklad není možné vyřešit, protože platí  $f(3) = 3$  a zároveň  $f(-3) = 0$ . Graf funkce tedy už nyní nesplňuje podmínku pro sudost  $f(3) = f(-3)$  ani podmínku pro lichost  $f(3) = -f(-3)$ . Když do grafu přidáme další body na tomto faktu se nic nezmění.

**Pedagogická poznámka:** Určitě není překvapením, že mnoho studentů příklad, který není řešitelný, hravě vyřeší. Další sice mají pocit, že něco není v pořádku, ale jen málo z nich překoná zábrany a ozve se.

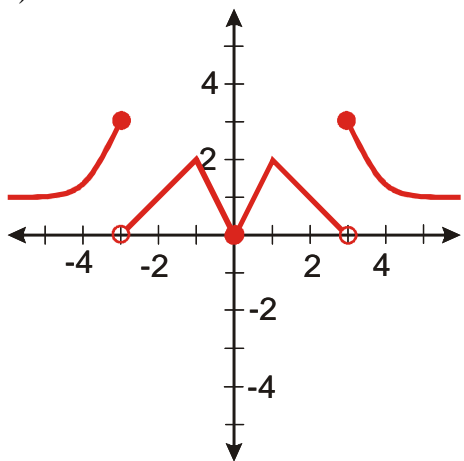
**Př. 5:** Uprav předchozí graf tak, aby byl předchozí úkol splnitelný.

Stačí jeden ze jmenovaných bodů odstranit abychom hodnotu pro opačné  $x$  mohli stanovit tak, jak to vyžaduje odpovídající definice.

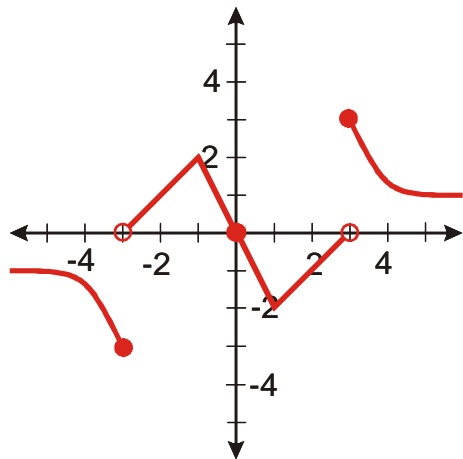


**Př. 6:** Doplň upravený graf funkce tak, aby byla: a) sudá b) lichá.

a) sudá



b) lichá



**Shrnutí:** Funkce, u kterých souvisí hodnoty navzájem opačných čísel, nazýváme sudé (platí  $f(x) = f(-x)$ ) nebo liché (platí  $f(x) = -f(-x)$ ).