

2.7.7 Inverzní funkce

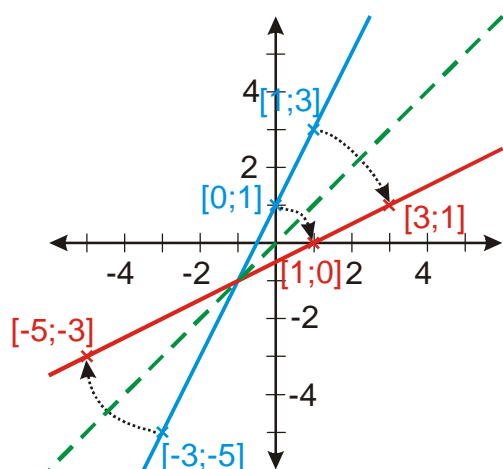
Př. 1: Je dána funkce $y = 2x + 1$. Napiš tabulku hodnot této funkce pro pět hodnot proměnné x ($x \in \{-20; -3; 0; 1; 10\}$) a nakresli její graf.

x	-20	-3	0	1	10
y	-39	-5	1	3	21

Př. 2: Nakresli tabulku hodnot inverzní funkce, které odpovídají tabulce hodnot původní funkce z příkladu 1.

x	-39	-5	1	3	21
y	-20	-3	0	1	10

Př. 3: Do předchozího obrázku s grafem funkce $y = 2x + 1$ dokresli graf inverzní funkce a vyznač do něj, dvojice odpovídajících si bodů původní a inverzní funkce.



Existují funkce, které jsou inverzní sami ze sebou?

Funkce, jejichž graf je souměrný podle osy $y = x$. Například $y = x$ nebo $y = \frac{1}{x}$.

Př. 4: Najdi předpis inverzní funkce k funkci $y = 2x + 1$.

$[1; 0]; [3; 1]$ a dosadíme do předpisu $y = ax + b \Rightarrow$ soustava:
$$\begin{cases} 0 = a \cdot 1 + b \\ 1 = a \cdot 3 + b \end{cases}$$

Po odečtení: $1 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Do první rovnice $0 = a \cdot 1 + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

Předpis inverzní funkce získáme prohozením x a y a úpravou na tvar $y =$.

Je-li druhá funkce inverzní k první je i první inverzní k druhé.

Má každá funkce funkci inverzní?

Př. 5: Zkus najít funkci, která nemá funkci inverzní.

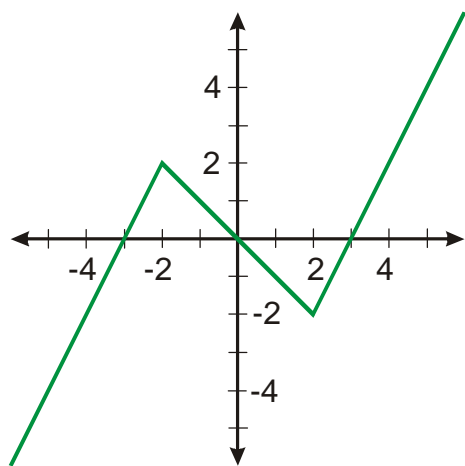
Konstantní funkce $y = 1$ nemá funkci inverzní.

Inverzní funkci můžeme nalézt pouze pro prosté funkce.

Př. 6: Najdi další funkce, které nemají funkci inverzní.

$y = |x|; y = x^2$ atd. Žádná sudá funkce nemá funkci inverzní.

Př. 7: Rozhodni, zda platí, že všechny liché funkce mají funkci inverzní.



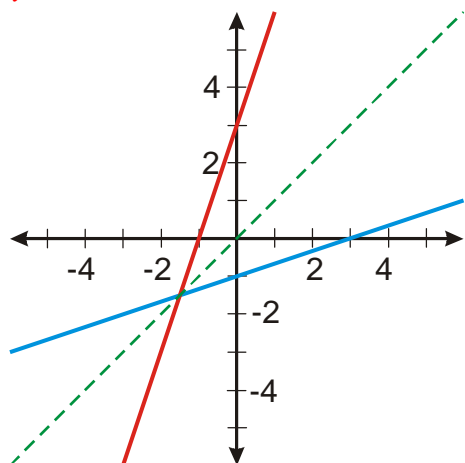
Př. 8: Najdi inverzní funkci k funkci

$$y = \frac{x}{3} - 1.$$

Prohodíme x a y : $y = \frac{x}{3} - 1 \Rightarrow x = \frac{y}{3} - 1$

$$x + 1 = \frac{y}{3}$$

$$y = 3x + 3$$



Z obrázku je zřejmé, že grafy jsou souměrné podle přímky $y = x$.

Pro funkci $y = \frac{x}{3} - 1$ platí: $D(f) = \mathbb{R}$,

$$H(f) = \mathbb{R}$$

Pro funkci $y = 3x + 3$ platí: $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$,

$$H(f^{-1}) = \mathbb{R}.$$

Vztahy: $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ platí.

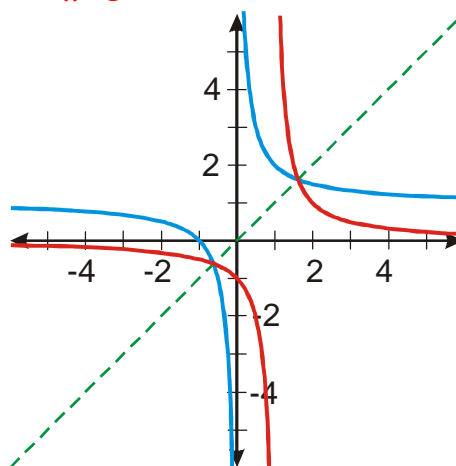
Př. 9: Najdi inverzní funkci k funkci

$$y = \frac{1}{x} + 1.$$

Prohodíme x a y : $y = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y} + 1$

$$x - 1 = \frac{1}{y}$$

$$y = \frac{1}{x - 1}$$



Z obrázku je zřejmé, že grafy jsou souměrné podle přímky $y = x$.

Pro funkci $y = \frac{1}{x} + 1$ platí: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$,

$$H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Pro funkci $y = \frac{1}{x - 1}$ platí: $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$,

$$H(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Vztahy: $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ platí.

Př. 10: Petáková:

strana 33/cvičení 89 a) b) e)

strana 33/cvičení 90 a) b) d) e)