

2.7.13 Mocniny s racionálním mocnitelem

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2}$

- Ale co znamená $2^{\frac{2}{3}}$?

$$(\sqrt{2})^2 = (2^p)^2 = 2^1 \qquad 2^{2p} = 2^1$$

$$2p = 1 \qquad p = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Možná platí: } \sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}}.$$

Př. 1: Spočti: $(\sqrt{2})^3$ a $\sqrt{2^8}$ do dvou sloupců, jednak klasicky pomocí vzorců pro úpravy odmocnin a jednak nahrazením $\sqrt{(\quad)} = (\quad)^{\frac{1}{2}}$ a použitím vzorců pro úpravy mocnin.

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^3 &= \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} & \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 &= 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2^8} &= \sqrt{(2^4)^2} = 2^4 & \sqrt{2^8} &= (2^8)^{\frac{1}{2}} = 2^{8 \cdot \frac{1}{2}} = 2^4 \end{aligned}$$

Př. 2: Navrhni nahrazení třetí odmocniny mocninou.

$${}^3\sqrt{a} = a^p \text{ použijeme } ({}^3\sqrt{a})^3 = a. \quad ({}^3\sqrt{a})^3 = (a^p)^3 = a^1 \quad a^{3p} = a^1$$

$$3p = 1 \qquad p = \frac{1}{3} \Rightarrow {}^3\sqrt{a} = (a)^{\frac{1}{3}}$$

Př. 3: Podobně jako v příkladu 1 ověř, že je možné třetí odmocninu nahradit racionálním mocnitelem.

$$\begin{aligned} ({}^3\sqrt{a})^7 &= \sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a} = \sqrt[3]{a^6} \sqrt[3]{a} = a^2 \sqrt[3]{a} & ({}^3\sqrt{a})^7 &= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^7 = a^{\frac{7}{3}} = a^{2+\frac{1}{3}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^2 \sqrt[3]{a} \\ ({}^3\sqrt{a})^{12} &= \sqrt{(a^4)^3} = a^4 & ({}^3\sqrt{a})^{12} &= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{12} = a^{\frac{12}{3}} = a^4 \end{aligned}$$

Pro každé kladné reálné číslo a, pro každé přirozené číslo n platí: ${}^n\sqrt{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Pro každé kladné reálné číslo a, pro každé celé číslo m, pro každé přirozené číslo n platí: ${}^n\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Př. 4: Zapiš pomocí racionálního mocnitele:

a) $\sqrt[7]{3}$ b) ${}^6\sqrt{a^3}$ c) ${}^5\sqrt{a^{-6}}$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6$

a) $\sqrt[7]{3} = 3^{\frac{1}{7}}$ b) ${}^6\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$ c) ${}^5\sqrt{a^{-6}} = a^{-\frac{6}{5}}$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6 = \frac{1}{(\sqrt[4]{a})^6} = (\sqrt[4]{a})^{-6} = a^{-\frac{6}{4}} = a^{-\frac{3}{2}}$

Pro všechna kladná reálná čísla a, b a pro všechna racionální čísla r, s platí:

$$(a^r)^s = a^{rs} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad (ab)^r = a^r b^r \quad a^r a^s = a^{r+s} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Př. 5: Zjednoduř výrazy:

$$\text{a) } a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} \quad \text{b) } \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} \quad \text{c) } \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} \quad \text{d) } \frac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}}$$

$$\text{a) } a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2+4}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2 \quad \text{b) } \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} = a^{\frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 3}} = a^{\frac{36}{6}} = a^6$$

$$\text{c) } \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{4-3}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a} \quad \text{d) } \frac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}} = a^{1 + \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)} = a^3$$

Př. 6: Částečně odmocni převedením na racionálního mocnitele $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$$\sqrt[6]{a^{15}} = a^{\frac{15}{6}} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2 + \frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^2 \sqrt{a}$$

Př. 7: Zjednoduř následující výrazy převedením na racionálního mocnitele.

$$\text{a) } \sqrt[12]{2^{18}} \quad \text{b) } \sqrt[4]{4} \quad \text{c) } \sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}}$$

$$\text{a) } \sqrt[12]{2^{18}} = 2^{\frac{18}{12}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1 + \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \quad \text{b) } \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}} = \left(a(a^{10})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (a \cdot a^5)^{\frac{1}{3}} = (a^6)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

Př. 8: Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny převedením na racionálního mocnitele.

$$\text{a) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \quad \text{b) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \quad \text{c) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$$

$$\text{a) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{3+4}{6}} = 3^{\frac{7}{6}} = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{10+5+8}{20}} = 3^{\frac{23}{20}} = 3 \cdot \sqrt[20]{3^3}$$

$$\text{c) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}} = a^{\frac{3+4+5}{6}} = a^{\frac{12}{6}} = a^2$$

Př. 9: Petáková:

- strana 63/cvičení 49 e) h) i)
 strana 63/cvičení 50 e)
 strana 63/cvičení 51 b) c) f)
 strana 63/cvičení 42 c) f)