2.7.18 Řešení nerovnic metodou nulových bodů I

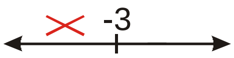
Př. 1: Najdi řešení nerovnice $f(x) > 0$, pro funkci $y = f(x)$ na grafu výše.

$K = (-2;1) \cup \langle 3;\infty)$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x+3} \geq x+1$.metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

řešíme nerovnici $x+3 \geq 0$ $\quad\quad x \geq -3$



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in (-\infty;-3\rangle$.

2. Hledáme řešení rovnice $\sqrt{x+3} = x+1$ (abychom objevili nulové body nerovnice, kde

$\sqrt{x+3} = x+1 \quad /^2$

$0 = x^2 + x - 2$ $\quad\quad (x+2)(x-1) = 0$

$x_1 = -2$, $x_2 = 1$

Zkouška:

$x_1 = -2$ $\quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{-2+3} = 1$ $\quad P = x+1 = -2+1 = -1$

$x_1 = 1$ $\quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = 2$ $\quad P = x+1 = 1+1 = 2$

$\Rightarrow$ jediný kořen $x = 1$ Doplníme získané kořeny na osu:

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;-3)$: pro tato *x* není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.
- interval $(-3;1)$: vybereme číslo například 0:

  $\sqrt{x+3} \geq x+1$ $\quad\quad \sqrt{0+3} \geq 0+1$

  $\sqrt{3} \geq 1$ - platí $\Rightarrow$ interval $(-3;1)$ není řešením
- interval $(2;\infty)$: vybereme číslo například 6 (kvůli odmocňování):

  $\sqrt{x+3} \geq x+1$ $\quad\quad \sqrt{6+3} \geq 6+1$

  $3 \geq 7$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(2;\infty)$ není řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost $\geq$ přidám k nalezenému intervalu ještě nulové body $\Rightarrow$ $K = \langle -3;1\rangle$

Př. 3: Vyřeš nerovnici $3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x$.metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

řešíme nerovnici $3x - x^2 - 2 \geq 0$

hledáme kořeny rovnice $3x - x^2 - 2 = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$

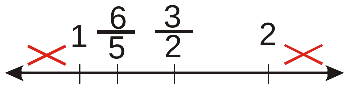
Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in \langle 1;2\rangle$.

2. Hledáme řešení rovnice $3\sqrt{3x-x^2-2}=x$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu *x*.

$9\left(3x-x^2-2\right)=x^2 \qquad 27x-9x^2-18=x^2$

$$10x^2-27x+18=0 \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-27)\pm\sqrt{(-27)^2-4\cdot10\cdot18}}{2\cdot10}=\frac{27\pm\sqrt{9}}{20}=\frac{27\pm3}{20}$$

$$x_1=\frac{24}{20}=\frac{6}{5},\ x_2=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$$

Doplníme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;1)$: pro tato *x* není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.
- interval $\left(1;\frac{6}{5}\right)$: vybereme číslo například 1,1:

  $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x \qquad 3\sqrt{3\cdot1{,}1-(1{,}1)^2-2}\geq1{,}1$

  $0{,}9\geq1{,}1$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $\left(1;\frac{6}{5}\right)$ není řešením
- interval $\left(\frac{6}{5};\frac{3}{2}\right)$: vybereme číslo například 1,3:

  $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x \qquad 3\sqrt{3\cdot1{,}3-(1{,}3)^2-2}\geq1{,}3$

  $1{,}37\geq1{,}3$ - platí $\Rightarrow$ interval $\left(\frac{6}{5};\frac{3}{2}\right)$ je řešením
- interval $\left(\frac{3}{2};2\right)$: vybereme číslo například 1,7:

  $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x \qquad 3\sqrt{3\cdot1{,}7-(1{,}7)^2-2}\geq1{,}7$

  $1{,}37\geq1{,}7$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $\left(\frac{3}{2};2\right)$ není řešením
- interval $(2;\infty)$: pro tato *x* není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost $\geq$ přidám k nalezenému intervalu ještě nulové body$\Rightarrow$ $K=\left\langle\frac{6}{5};\frac{3}{2}\right\rangle$