

2.7.21 Soustavy rovnic obsahující kvadratickou rovnici II

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$
 $y = 4 - x$

soustava rovnic, řešíme dosazením $y = 4 - x$

$$\begin{array}{rcl} (x-3)^2 + (4-x-2)^2 = 25 & & (x-3)^2 + (2-x)^2 = 25 \\ x^2 - 6x + 9 + (4-4x+x^2) = 25 & & 2x^2 - 10x - 12 = 0 \quad /:2 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 & & (x+1)(x-6) = 0 \end{array}$$

$$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 4 - x_1 = 4 - (-1) = 5$$

$$x_2 = 6 \Rightarrow y_1 = 4 - x_1 = 4 - 6 = -2$$

$K = \{[-1, 5]; [6, -2]\} \Rightarrow$ pro řešení předchozího příkladu z toho vyplývá, že na přímce $y = 4 - x$ leží dva body $[-1, 5]$ a $[6, -2]$, které mají od bodu $[3; 2]$ vzdálenost 5.

Př. 2: (BONUS) Najdi průsečík kružnic $k_1 ([0, 0]; r = 3)$ a $k_2 ([-9, 9]; r = 13)$

$$\begin{array}{rcl} k_1 : (x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2 & & k_2 : (x-(-9))^2 + (y-9)^2 = 13^2 \\ & & x^2 + y^2 = 25 \end{array}$$

$$x^2 + 18x + 81 + y^2 - 18y + 81 = 169$$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 25 \\ \hline x^2 + y^2 + 18x - 18y = 7 \end{array}, \text{ kterou řešíme v následujícím příkladu}$$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic: $x^2 + y^2 = 25$
 $x^2 + y^2 + 18x - 18y = 7$

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 = 25 & & \\ \hline \text{[1]} - \text{[2]} & -18x + 18y = 18 & /:18 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$-x + y = 1$$

Tedy už můžeme dosazovat – ze druhé rovnice $y = x + 1$

$$x^2 + (x+1)^2 = 25 \quad x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0 \quad /:2 \quad x^2 + x - 12 = 0 \quad (x+4)(x-3) = 0$$

$$x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1 = -4 + 1 = -3$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = x_2 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$K = \{[-4; -3]; [3; 4]\} \Rightarrow$ pro řešení předchozího příkladu z toho vyplývá, že zadané kružnice se protnou v bodech $[-4; -3]$ a $[3; 4]$.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic: $\frac{x+2y+3}{x+1} = 2$ $\frac{x+y+2}{y+1} = x+2$.

1. rovnice: $\frac{x+2y+3}{x+1} = 2 \quad / \cdot (x+1)$ podmínka $x \neq -1$

$$x+2y+3=2(x+1) \quad 2y=x-1 \quad x-2y=1$$

2. rovnice: $\frac{x+y+2}{y+1} = x+2 \quad / \cdot (y+1)$ podmínka $y \neq -1$

$$x+y+2=(x+2)(y+1) \quad x+y+2=xy+x+2y+2 \quad xy+y=0$$

Dosadíme z první rovnice do druhé: $x-2y=1 \Rightarrow x=2y+1$

$$(2y+1)y+y=0 \quad 2y^2+2y=0 \quad y(y+1)=0$$

$$y_1=0 \Rightarrow x_1=2y_1+1=2 \cdot 0+1=1$$

$$y_2=-1 \Rightarrow x_2=2y_2+1=2 \cdot (-1)+1=-1 \quad - \text{ tato dvojice nevyhovuje podmínce } x \neq -1$$

$$K = \{[1; 0]\}$$

$$y+2z=8$$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic: $x-y+z=2$

$$x^2+y^2+z^2=14$$

$$y+2z=8 \Rightarrow y=8-2z$$

$$y+2z=8$$

$$y+2z=8$$

$$x-(8-2z)+z=2$$

$$x+3z=10$$

$$x^2+(8-2z)^2+z^2=14$$

$$x^2+5z^2-32z=-50$$

Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do třetí:

$$x+3z=10 \Rightarrow x=10-3z$$

$$y+2z=8$$

$$y+2z=8$$

$$x+3z=10$$

$$x+3z=10$$

$$(10-3z)^2+5z^2-32z=-50$$

$$14z^2-92z+150=0$$

Poslední rovnice obsahuje jedinou proměnnou. Řešíme jako kvadratickou rovnicí:

$$14z^2-92z+150=0 \quad /:2$$

$$7z^2-46z+75=0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-46) \pm \sqrt{(-46)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 75}}{2 \cdot 7} = \frac{46 \pm \sqrt{16}}{14} = \frac{46 \pm 4}{14}$$

$$z_1 = \frac{25}{7} \quad x_1 = 10 - 3z_1 = 10 - 3 \cdot \frac{25}{7} = -\frac{5}{7} \quad y_1 = 8 - 2z_1 = 8 - 2 \cdot \frac{25}{7} = \frac{6}{7}$$

$$z_2 = 3 \quad x_2 = 10 - 3z_2 = 10 - 3 \cdot 3 = 1 \quad y_2 = 8 - 2z_2 = 8 - 2 \cdot 3 = 2$$

$$K = \left\{ \left[-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}; \frac{25}{7} \right]; [1; 2; 3] \right\}$$

Př. 6: Petáková:

strana 17/cvičení 33 d) e) g)