2.7.22 Použití substituce při řešení rovnic

Př. 1: Vyřeš rovnici $4\left(\frac{2x-3}{3x+1}-2\right)=\frac{2x-3}{3x+1}+3$

Substituce: $y=\frac{2x-3}{3x+1}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $4(y-2)=y+3$.

$4y-8=y+3$ $3y=11$ $y=\frac{11}{3}$

Návrat k původní proměnné: $y=\frac{11}{3}=\frac{2x-3}{3x+1}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $\frac{2x-3}{3x+1}=\frac{11}{3}$

Podmínka: $3x+1\neq 0\Rightarrow x\neq -\frac{1}{3}$

$\frac{2x-3}{3x+1}=\frac{11}{3}$ $/\cdot(3x+1)$ $3(2x-3)=11(3x+1)$ $x=-\frac{20}{27}$ $K=\left\{-\frac{20}{27}\right\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\frac{2t}{t+1}+1=6\frac{t+1}{2t}$.

Substituce: $x=\frac{2t}{t+1}$, $\frac{t+1}{2t}=\frac{1}{\frac{t+1}{2t}}=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x+1=6\frac{1}{x}$.

$x+1=6\frac{1}{x}$ $/\cdot x$ $x^2+x=6$ $(x-2)(x+3)=0$ $x_1=2$ $x_2=-3$

Návrat k původní proměnné:

$x_1=2=\frac{2t}{t+1}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $\frac{2t}{t+1}=2$ $/\cdot(t+1)$, podmínka $t\neq -1$

$2t=2t+2$ $0=2$ - to se nerovná $\Rightarrow$ pro $x_1=2$ nemám žádné *t*.

$x_2=-3=\frac{2t}{t+1}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $\frac{2t}{t+1}=-3$ $/\cdot(t+1)$, podmínka $t\neq -1$

$2t=-3t-3$ $5t=-3$ $t=-\frac{3}{5}$ $K=\left\{-\frac{3}{5}\right\}$

Př. 3: Vyřeš rovnici $(u+1)^2=3|u+1|+10$.

$x=|u+1|$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x^2=3x+10$.

$x^2-3x-10=0$ $(x-5)(x+2)=0$ $x_1=5$ $x_2=-2$

Návrat k původní proměnné:

$|u+1|=|u-(-1)|=5$ - hledáme čísla, jejichž obraz na číselné ose je od obrazu čísla –1 vzdálen 5 $\Rightarrow$ $u_1=4$, $u_2=-6$

$x_2=-2=|u+1|$ $\Rightarrow$ nemá řešení, absolutní hodnota nemůže být záporná $K=\{-6;4\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sqrt{2\left(x^2+7x+10\right)^2-7}=x^2+7x+11$.

Substituce: hodilo by se $y=x^2+7x+10$, na pravé straně $x^2+7x+11=x^2+7x+10+1=y+1$

$\sqrt{2y^2-7}=y+1 \quad /^2 \quad \left(\sqrt{2y^2-7}\right)^2=(y+1)^2 \qquad 2y^2-7=y^2+2y+1$

$y^2-2y-8=0 \qquad (y-4)(y+2)=0 \qquad y_1=4 \qquad y_2=-2$

$y_1=4$: $\sqrt{2\cdot 4^2-7}=4+1$

$5=5$ - v pořádku $y_1=4$ je kořen rovnice $\sqrt{2y^2-7}=y+1$

$y_2=-2$: $\sqrt{2\cdot(-2)^2-7}=(-2)+1$

$1\neq -1$ - nerovná se $y_2=-2$ není kořen rovnice $\sqrt{2y^2-7}=y+1$

Návrat k původní proměnné:

Dosadíme y_1: $y_1=4=x^2+7x+10 \Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x^2+7x+10=4$

$x^2+7x+6=0 \qquad (x+6)(x+1)=0 \qquad x_1=-6 \qquad x_2=-1 \qquad K=\{-6;-1\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $x^4-4x^2+3=0$.

Substituce: použijeme $y=x^2 \Rightarrow$ Řešíme rovnici: $y^2-4y+3=0$ obyčejná kvadratická rovnice.

$y^2-4y+3=0 \qquad (y-3)(y-1)=0 \qquad y_1=3 \qquad y_2=1$

Návrat k původní proměnné:

Dosadíme y_1: $y_1=3=x^2 \Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x^2=3$ $\quad x_1=-\sqrt{3} \qquad x_2=\sqrt{3}$

Dosadíme y_2: $y_1=1=x^2 \Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x^2=1$ $\quad x_3=-1 \qquad x_4=1$

$K=\left\{-\sqrt{3};-1;1;\sqrt{3}\right\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $4x^4-5x^2-9=0$.

Substituce: použijeme $y=x^2 \Rightarrow$ Řešíme rovnici: $4y^2-5y-9=0$ obyčejná kvadratická

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot4\cdot(-9)}}{2\cdot4}=\frac{5\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{5\pm13}{8}$$

$$y_1=\frac{5+13}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4} \qquad y_2=\frac{5-13}{8}=-\frac{8}{8}=-1$$

Návrat k původní proměnné:

Dosadíme y_1: $\quad y_1=\frac{9}{4}=x^2 \Rightarrow$ rovnici: $x^2=\frac{9}{4} \qquad x_1=-\frac{3}{2} \qquad x_2=\frac{3}{2}$

Dosadíme y_2: $\quad y_1=-1=x^2 \Rightarrow$ tady nenajdeme žádné kořeny, není číslo pro které je po umocnění na druhou záporné $\qquad K=\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Př. 7: Petáková:
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)