2.7.24 Použití substituce pro řešení nerovnic I

Předpoklady: 2722, 2723

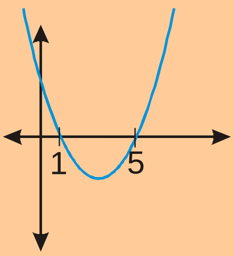
Pedagogická poznámka: Zadání příkladů v této i následující hodině je tak krátké, že ho přepíšu na tabuli a na projektoru nechávám řešení pro nejpomalejší studenty.

Pedagogická poznámka: Řešení nerovnic s parametrem je rozděleno do dvou hodin, zejména proto, že se ukázalo jako velice dobré cvičení na orientaci v příkladu. Jako ve všech příkladech se substitucí musí studenti rozlišovat zda řeší zrovna substituované zadání nebo už původní příklad. Navíc výsledky nerovnic vyžadují dobrou orientaci ve významu intervalů.
První (substituovaná) část příkladů v této hodině je velmi jednoduchá, těžiště příkladů je v druhé části, kde jsou postupně vystřídány všechny možnosti vstupních intervalů a kde musí studenti prokázat dobrou orientaci v tom, co intervaly znamenají.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $x^4-6x^2+5>0$.

Nerovnice s x^4 řešit neumíme, ale můžeme zadání přepsat takto:
$x^4-6x^2+5=\left(x^2\right)^2-6\left(x^2\right)+5>0$, v nerovnici pak vystupuje pouze x^2.

Substituce: použijeme $y=x^2$ $\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2-6y+5>0$ obyčejná kvadratická nerovnice.
Zjistíme průsečíky grafu s osou *x*:
$y^2-6y+5=0$
$(y-5)(y-1)=0$
$y_1=5$ $\qquad$ $y_2=1$

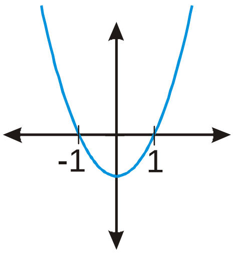
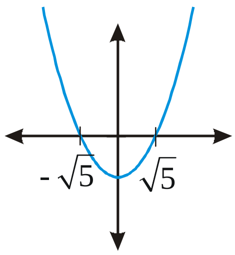


hledáme body nad osou *x*
$y\in(-\infty;1)\cup(5;\infty)$

Návrat k původní proměnné:
$x^2=y\in(-\infty;1)\cup(5;\infty)$

Přepíšeme oba intervaly hodnot x^2 pomocí nerovnic:

$x^2\in(-\infty;1)\Rightarrow x^2<1$	$x^2\in(5;\infty)\Rightarrow x^2>5$
Získali jsem dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť a výsledky sjednotíme	
$x^2<1$ Zjistíme průsečíky s osou *x*: $x^2=1$	$x^2>5$ Zjistíme průsečíky s osou *x*: $x^2=5$

$x^2-1=0$ $(x-1)(x+1)=0$ $x_1=1 \qquad x_2=-1$  hledáme body pod osou *x* $K_1=(-1;1)$	$x^2-5=0$ $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$ $x_1=\sqrt{5} \qquad x_2=-\sqrt{5}$  hledáme body nad osou *x* $K_2=(-\infty;-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\infty)$

$K=K_1\cup K_2=(-\infty;-\sqrt{5})\cup(-1;1)\cup(\sqrt{5};\infty)$

Pedagogická poznámka: Protože jde o první příklad tohoto typu nenechávám studenty na přechodu příliš dlouho čekat. Nejdříve jim připomenu, že je možné intervaly zapsat také pomocí nerovnice, pokud se nechytí po chvilce jim ukáži začátek levého sloupce.

Př. 2: Vyřeš nerovnici $x^4+4x^2+3>0$.

Nerovnice s x^4 řešit neumíme, ale můžeme zadání přepsat takto:

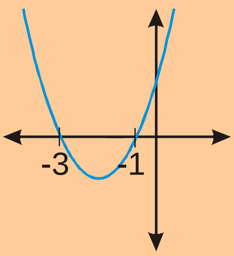
$x^4+4x^2+3=(x^2)^2+4(x^2)+3>0$, v nerovnici pak vystupuje pouze x^2.

Substituce: použiju $y=x^2$ $\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2+4y+3>0$ obyčejná kvadratická nerovnice.
Zjistíme průsečíky grafu s osou *x*:

$y^2+4y+3>0$

$(y+3)(y+1)>0$

$y_1=-3 \qquad y_2=-1$



hledáme body nad osou *x*

$y\in(-\infty;-3)\cup(-1;\infty)$

Návrat k původní proměnné:

$x^2=y\in(-\infty;-3)\cup(-1;\infty)$

Přepíšeme oba intervaly hodnot x^2 pomocí nerovnic:

$x^2\in(-\infty;-3)\Rightarrow x^2<-3$	$x^2\in(-1;\infty)\Rightarrow x^2>-1$
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť a výsledky sjednotíme	

$x^2 < -3$ nemá cenu počítat, platí $x^2 \geq 0 \;\Rightarrow$ $K_1 = \emptyset$	$x^2 > -1$ nemá cenu počítat, platí $x^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; K_2 = R$

$K = K_1 \cup K_2 = R$

Př. 3: Řešení nerovnice $x^4 + 4x^2 + 3 > 0$ z předchozího příkladu je zřejmé už ze zadání. Vysvětli.

Neznámá se na levé straně nerovnice vyskytuje pouze v sudých mocninách $\Rightarrow$

- $x^4 \geq 0$ vždy
- $4x^2 \geq 0$ vždy
- $3 > 0$ vždy

$\Rightarrow\; x^4 + 4x^2 + 3 > 0$ pro všechna $x \in R \;\Rightarrow\; K = R$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $x^4 - 7x^2 + 12 < 0$.

Zadání upravíme podobně jako u předchozích příkladů: $x^4 - 7x^2 + 12 = \left(x^2\right)^2 - 7x^2 + 12 < 0$, v nerovnici pak vystupuje pouze x^2.

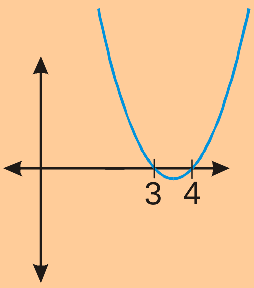
Substituce: použijeme $y = x^2 \;\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2 - 7y + 12 < 0$ obyčejná kvadratická nerovnice.

Zjistíme průsečíky grafu s osou *x*:

$y^2 - 7y + 12 = 0$

$(y-4)(y-3) = 0$

$y_1 = 4$ $\qquad\qquad$ $y_2 = 3$



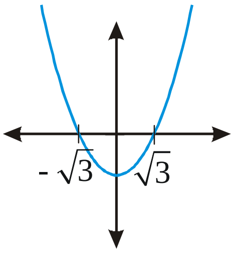
hledáme body pod osou *x* $\Rightarrow\; y \in (3;4)$

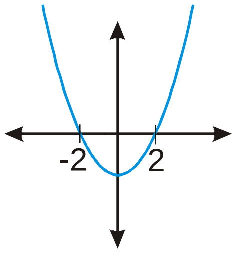
Návrat k původní proměnné:

$x^2 = y \in (3;4)$

Přepíšeme interval hodnot x^2 pomocí nerovnic:

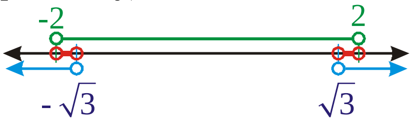
<table>
<tr><td colspan="2">$x^2 \in (3;4) \Leftrightarrow x^2 > 3$ a zároveň $x^2 < 4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě podmínky najednou výsledek získáme jako průnik jejich řešení</td></tr>
<tr><td>$x^2 > 3$
Zjistíme průsečíky s osou x:
$x^2 = 3$
$x^2 - 3 = 0$</td><td>$x^2 < 4$
Zjistíme průsečíky s osou x:
$x^2 = 4$
$x^2 - 4 = 0$
$(x-2)(x+2) = 0$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
$\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0$
$x_1=\sqrt{3}$ $\quad x_2=-\sqrt{3}$


hledáme body nad osou x
$K_1=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$
</td>
<td>
$x_1=2$ $\quad x_2=-2$


hledáme body pod osou x
$K_2=\left(-2;2\right)$
</td>
</tr>
</table>

Hledáme průnik množin $K_1=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$ a $K_2=\left(-2;2\right)$ (x musí splňovat obě podmínky). Nakreslíme si osu a najdeme průnik:



$K=K_1\cap K_2=\left(-2;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad se liší od prvních dvou tím, že podmínky vzniklé z intervalu musí být splněny najednou a proto se dělá průnik částečných řešení (ne sjednocení jako u prvních dvou příkladů). Samostatně na to přijde jen málo studentů, některým stačí návodná pomoc v lavicích a ostatní budou potřebovat vysvětlení u tabule.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $x^4-4x^2-5\le 0$.

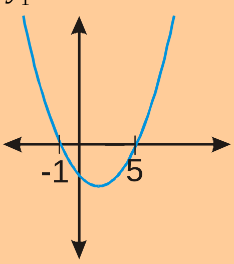
Zadání upravíme podobně jako u předchozích příkladů: $x^4-4x^2-5=\left(x^2\right)^2-4\left(x^2\right)-5\le 0$, v nerovnici pak vystupuje pouze x^2.

Substituce: použijeme $y=x^2$ $\Rightarrow$ Řešíme nerovnici: $y^2-4y-5\le 0$ obyčejná kvadratická nerovnice.
Zjistíme průsečíky grafu s osou x:

$y^2-4y-5\le 0$

$\left(y+1\right)\left(y-5\right)\le 0$

$y_1=-1$ $\qquad y_2=5$

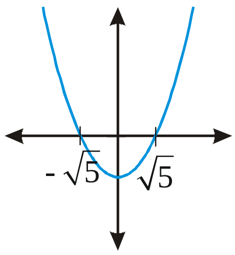


hledáme body pod osou x $\Rightarrow$ $y\in\left\langle -1;5\right\rangle$

Návrat k původní proměnné:

$x^2 = y \in \langle -1; 5 \rangle$

Přepíšeme interval hodnot x^2 pomocí nerovnic:

<table>
<tr><td colspan="2">$x^2 \in \langle -1; 5 \rangle \Leftrightarrow x^2 \geq -1$ a zároveň $x^2 \leq 5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě podmínky najednou výsledek získáme jako průnik jejich řešení</td></tr>
<tr><td>$x^2 \geq -1$
Nemusíme nic počítat, $x^2 \geq 0$ vždy $\Rightarrow$
$K_1 = R$</td><td>$x^2 \leq 5$
Zjistíme průsečíky s osou x:
$x^2 = 5$
$x^2 - 5 = 0$
$\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$
$x_1 = \sqrt{5} \qquad x_2 = -\sqrt{5}$


hledáme body pod osou x
$K_2 = \left\langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \right\rangle$</td></tr>
</table>

Hledáme průnik množin $K_1 = R$ a $K_2 = \left\langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \right\rangle$ (*x* musí splňovat obě podmínky).

$K = K_1 \cap K_2 = K_2 = \left\langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \right\rangle$

Shrnutí: Pomocí substituce je možné řešit i nerovnice. Pozor musíme dávat zejména v okamžiku, kdy se vracíme zpět k původní proměnné.