

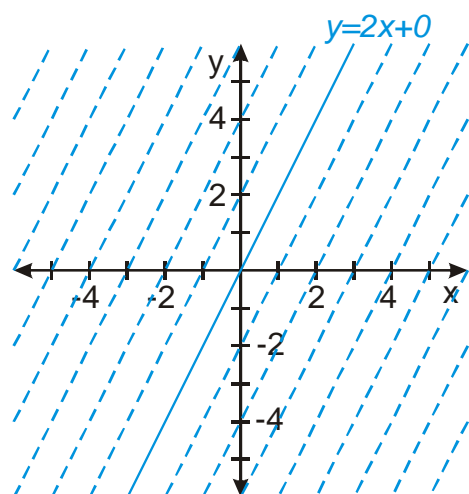
## 2.8.6 Parametrické systémy funkcí

**Předpoklady:** 2111, 2401, 2414, 2501, 2601

Stejně jako parametrická rovnice zastupuje mnoho rovnic najednou, parametricky zadaná funkce zastupuje mnoho funkcí.

**Pedagogická poznámka:** Názornost hodiny může podstatně zvýšit použití počítačově generovaných dynamických grafů.

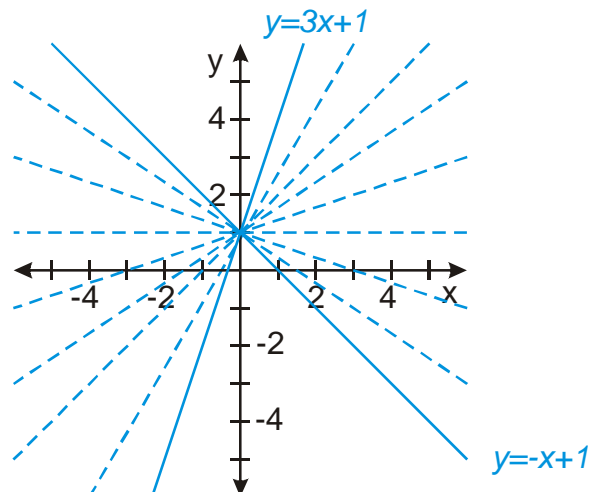
**Př. 1:** Nakresli parametrická systém lineárních funkcí daných předpisem  $y = 2x + b$ .



Nakreslím plnou čarou jednu konkrétní funkci  $y = 2x + 0$ , další funkce pro další hodnoty parametru  $b$  nakreslíme čárkovaně  $\Rightarrow$  získáme soustavu rovnoběžných přímek

**Př. 2:** Nakresli parametrický systém lineárních funkcí daných předpisem  $y = ax + 1$ ,  $a \in \langle -1; 3 \rangle$ .

Opět budeme kreslit lineární funkce, budou se lišit ve sklonu a budou procházet bodem  $[0;1]$ . Nakreslíme si krajní funkce  $y = -x + 1$  a  $y = 3x + 1$ , ostatní funkce budou ležet mezi nimi.

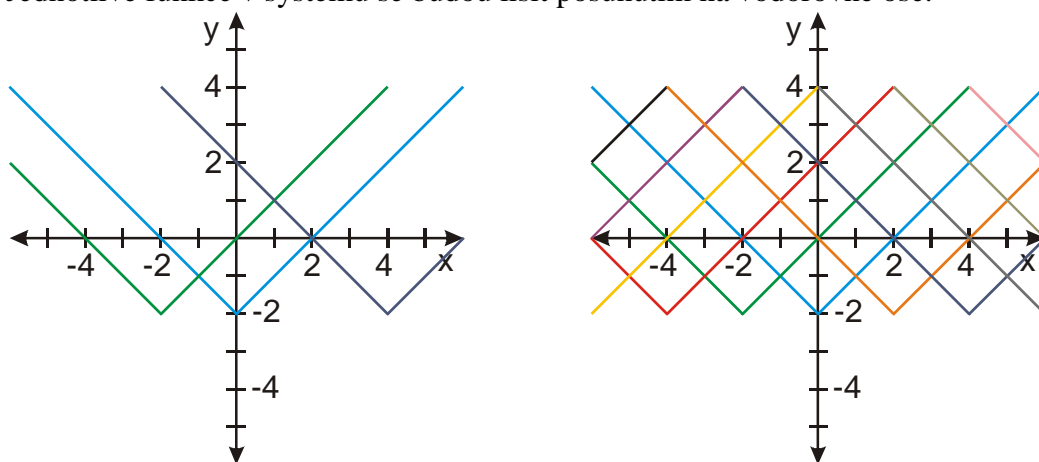


**Pedagogická poznámka:** Je potřeba dbát na to, aby obrázek z předchozího příkladu byl názorný. Studenti často nakreslí pouze krajní funkce a není pak zřejmé, který ze vzniklých úhlů vyplní funkce tvořící zadaný parametrický systém.

V podstatě nejde o nic jiného než si pamatovat vliv konstant na grafy jednotlivých funkcí.

**Př. 3:** Nakresli parametrický systém funkcí s absolutní hodnotou daných předpisem  $y = |x + c| - 2$ .

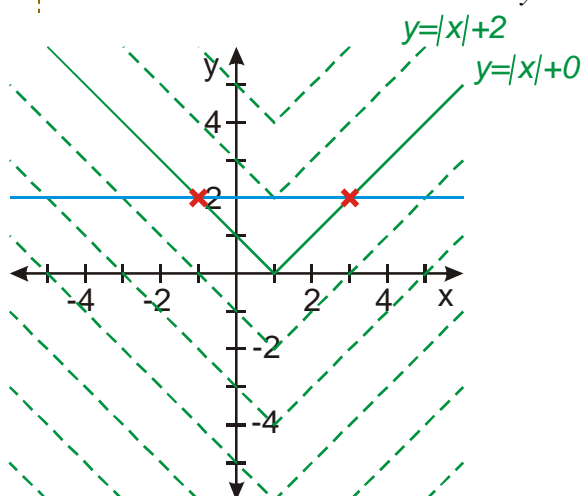
Jednotlivé funkce v systému se budou lišit posunutím na vodorovné ose.



**Př. 4:** Je dána rovnice  $|x-1| + a = 2$  s neznámou  $x \in R$  a parametrem  $a \in R$ . Urči pomocí grafického znázornění všechny hodnoty parametru  $a$ , pro něž má tato rovnice má aspoň jedno řešení.

Nakreslíme si obě strany rovnice:

- **Levá strana:** parametrický systém funkcí s absolutní hodnotou. Všechny mají minimum v bodě  $x = 1$ , liší se posunutím ve svislém směru, které určuje parametr  $a$ .
- **Pravá strana:** konstantní funkce  $y = 2$ .



Z obrázku je zřejmé, že rovnice má:

- dvě řešení pro  $a < 2$
- jedno řešení pro  $a = 2$

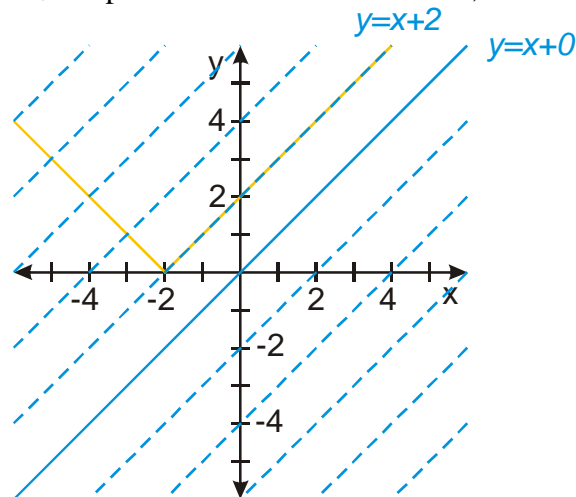
- žádné řešení pro  $a > 2$

Rovnice má alespoň jedno řešení pro  $a \leq 2$ .

**Př. 5:** Je dána rovnice  $|x+2| = x+a$  s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  a parametrem  $a \in \mathbb{R}$ . Pomocí grafického znázornění a proved' diskusi řešitelnosti vzhledem k parametru.

Nakreslíme si obě strany rovnice:

- **Levá strana:** funkce s absolutní hodnotou.
- **Pravá strana:** parametrický systém lineárních funkcí. Všechny mají stejný sklon, liší se posunutím ve svislém směru, které určuje parametr  $a$ .



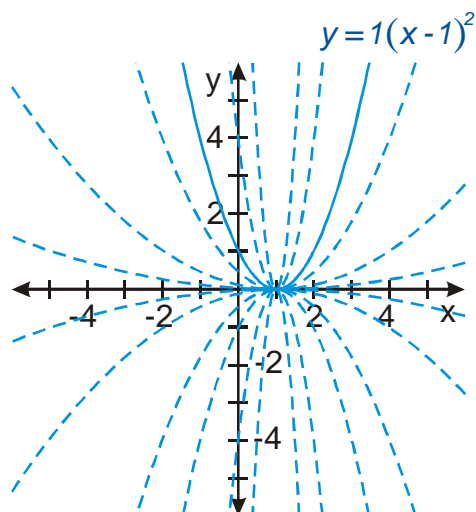
Z obrázku je zřejmé, že rovnice má:

- žádné řešení pro  $a < 2$
- nekonečně mnoho řešení pro  $a = 2$   $K = \langle -2; \infty \rangle$
- jedno řešení pro  $a > 2$

**Př. 6:** Nakresli parametrický systém kvadratických funkcí daných předpisem  $y = a(x-1)^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Všechny paraboly budou posunuté vpravo tak, aby jejich vrchol měl souřadnice  $[1; 0]$ .

Parametr  $a$  před druhou mocninou ovlivňuje tvar a orientaci paraboly:



Kladné hodnoty parametru  $a$  znamenají tvar „d'olíku“, záporné tvar „kopečku“. Čím je větší absolutní hodnota parametru  $a$ , tím je graf užší.

**Pedagogická poznámka:** Studenti často zapomínají na záporné hodnoty parametru (a tedy „kopečkové“ tvary grafu).

**Př. 7:** Nakresli parametrický systém kvadratických funkcí daných předpisem

$$y = a(x+1)^2 + a, \quad a \in R.$$

parametr se vyskytuje v předpisu funkce dvakrát, raději si zkusíme napsat několik předpisů pro různé hodnoty parametru:

$$a = 1: y = (x-1)^2 + 1$$

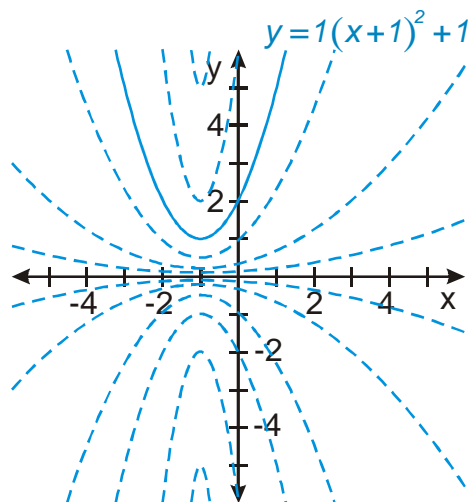
$$a = 2: y = 2(x-1)^2 + 2$$

$$a = 3: y = 3(x-1)^2 + 3$$

...

Všechny paraboly budou posunuté vlevo tak, aby jejich vrchol měl souřadnice  $[-1; a]$ .

Parametr  $a$  před druhou mocninou ovlivňuje tvar a orientaci paraboly a  $y$ -vou souřadnici jejího vrcholu  $\Rightarrow$  s rostoucí hodnotou  $a$  se paraboly posunují nahoru a zužují se



Kladné hodnoty parametru  $a$  znamenají tvar „dřolíku“, záporné tvar „kopečku“. Čím je větší absolutní hodnota parametru  $a$ , tím je graf užší.

**Pedagogická poznámka:** Výpis předpisů v řešení předchozího příkladu není samoučelný. Studenti mají značný problém s dvojitým výskytem parametru v předpisu funkce.

Častou chybou je, že studenti začínají od funkce  $y = (x-1)^2$  místo funkce

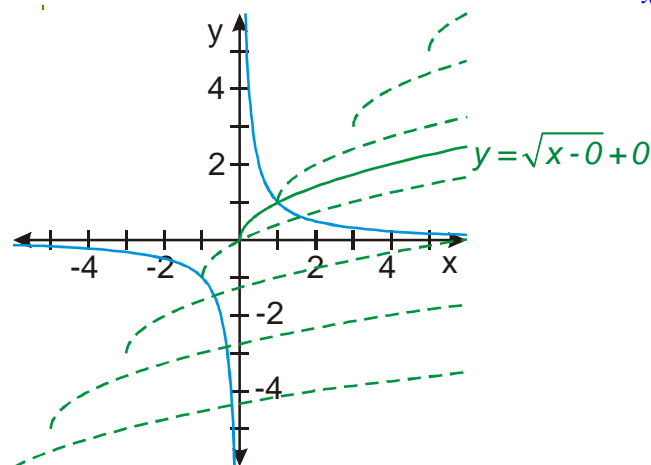
$$y = (x-1)^2 + 1.$$

**Př. 8:** Je dána rovnice  $\sqrt{x-a} + a = \frac{1}{x}$  s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  a parametrem

$a \in \mathbb{R}$ . Pomocí grafického znázornění a proved' diskusi řešitelnosti vzhledem k parametru.

Nakreslíme si obě strany rovnice:

- **Levá strana:** parametrický systém funkcí s odmocninou. Všechny funkce mají stejný tvar, liší se podle hodnot parametru polohou počátku, který je vždy v bodě  $[a; a]$ .
- **Pravá strana:** lineární lomená funkce  $y = \frac{1}{x}$ .



Z obrázku je zřejmé, že rovnice má:

- dvě řešení pro  $a \leq -1$
- jedno řešení pro  $a \in (-1; 1)$
- žádné řešení pro  $a > 1$

**Shrnutí:** Parametrické systémy funkcí jsou obdobou parametrických rovnic. Při jejich kreslení potřebujeme znát vliv jednotlivých konstant na graf funkce.