

## 2.9.4 Exponenciální rovnice I

### Předpoklady: 2902

**Pedagogická poznámka:** Exponenciální rovnice a nerovnice jsou roztaženy do celkem sedmi hodin zejména proto, že jsou brány jako nácvik „výběru metody“. Nejprve si v šesti hodinách probereme jednotlivé typy rovnic (soustav, nerovnic) a triků na jejich řešení. Během této doby si studenti sestavují řešící arzenál (obdobu rozkladného arzenálu z kapitoly o rozkladu na součin). Poslední hodina pak obsahuje promíchané různé typy příkladů, ve kterých by se studenti měli orientovat a vybrat k nim odpovídající metody řešení.

**Pedagogická poznámka:** Rychlost, se kterou budete postupovat, závisí na tom, jak rychle dokážou studenti řešit rovnice a jak dobře pracují s exponenty. U studentů vyučovaných podle klasických osnov (1. ročník rovnice, 2. ročník funkce) je mezi koncem rovnic a touto hodinu tak dlouhá prodleva, že hodně zapomenou a samotné počítání jim činí značné problémy. Problémy s exponenty jsou menší, protože odmocniny předcházejí v obou pojetích poměrně těsně a studenti nemají tolik času na jejich zapomenutí. Pokud postupujete pomaleji, než je v učebnici předepsáno, raději vynechejte soustavy případně i nerovnice, než abyste zmenšili počet rovnic, které budou studenti řešit při hodinách.

Co pak asi bude typické pro exponenciální rovnice?  
Stejně jako u exponenciálních funkcí se neznámá vyskytuje v exponentu.

**Př. 1:** Vyřeš exponenciální rovnici  $2^x = 8$ .

Jde to z paměti,  $x = 3$ .

Zkouška vyjde:

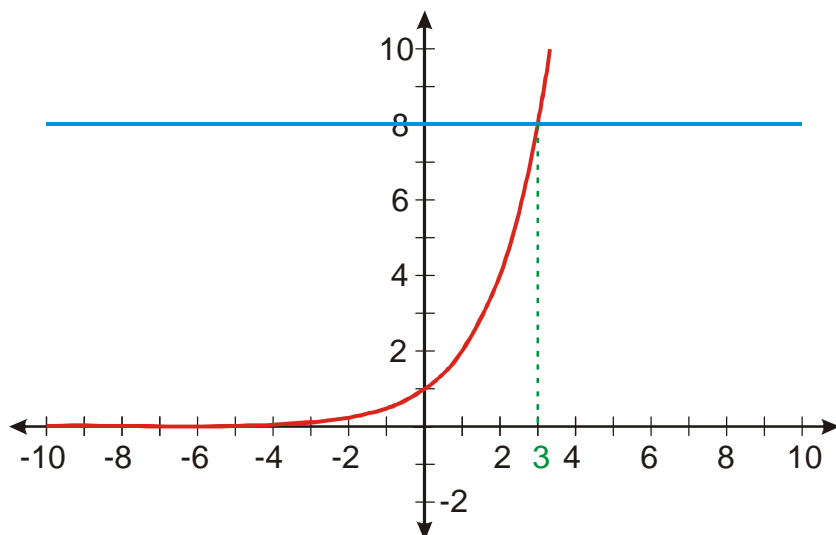
$$L = 2^3 = 8$$

$$P = 8$$

$$L = P$$

Výsledek je správný. Musíme trochu upřesnit postup.

Grafické řešení: Do jednoho obrázku nakreslíme grafy dvou funkcí  $y = 2^x$  a  $y = 8$ ,  $x$ -ové souřadnice bodů, ve kterých se grafy protnou, jsou řešením rovnice.



Rovnice má jedno řešení  $x = 3$ .

Grafické řešení je trochu těžkopádné a není přesné (trojku jsme uhádli jenom proto, že si pamatujeme rovnost  $2^3 = 8$ ).

Využijeme rovnost  $2^3 = 8$  a dosadíme do rovnice  $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3$ .

Rozebereme vzniklou rovnici:

- Levá strana:  $L = 2^x$  - hodnota funkce  $y = 2^x$  pro neznámé číslo  $x$
- Pravá strana:  $P = 2^3$  - hodnota funkce  $y = 2^x$  pro číslo 3

Obě strany se mají rovnat  $\Rightarrow$  funkce  $y = 2^x$  má pro  $x$  i pro 3 stejnou hodnotu.

Z grafu je vidět, že funkce  $y = 2^x$  je prostá (ke každému  $y$  má pouze jedno  $x$ )  $\Rightarrow$  pokud má funkce  $y = 2^x$  pro  $x$  i pro 3 stejnou hodnotu (konkrétní  $y$ ) musí se  $x$  a 3 rovnat (má pouze jednu hodnotu  $x$ , ze které jsme se k němu dostali)  $\Rightarrow x = 3$ .

I všechny ostatní exponenciální funkce  $a^x$  jdou prosté  $\Rightarrow$  postup můžeme použít obecně.

**Pokud se podaří exponenciální rovnici upravit do tvaru  $a^{\text{výraz1}} = a^{\text{výraz2}}$ , můžeme přejít k rovnici  $\text{výraz1} = \text{výraz2}$ . Protože funkce  $y = a^x$  je prostá, je tato úprava ekvivalentní.**

**Pedagogická poznámka:** Všechny další rovnice není možné řešit bez vzorců a pravidel pro úpravy exponentů mocnin. Upozorňuji studenty předem, ty, kteří s nimi mají příliš velké problémy, trestám pomocí mínusů.

**Př. 2:** Vyřeš rovnici  $2 \cdot 2^x \cdot 8 = \frac{2^x \cdot 2^{x+1}}{8}$ .

Zkusíme upravit rovnici do tvaru  $2^{\text{výraz1}} = 2^{\text{výraz2}}$ .

$$2 \cdot 2^x \cdot 2^3 = \frac{2^x \cdot 2^{x+1}}{2^3}$$

$$2^{1+x+3} = 2^{x+x+1-3}$$

$2^{x+4} = 2^{2x-2}$  Můžeme od rovnice  $2^{\text{výraz1}} = 2^{\text{výraz2}}$  přejít k rovnici  $\text{výraz1} = \text{výraz2}$ .

$$x+4 = 2x-2$$

$$6 = x$$

$$K = \{6\}$$

Předchozí postup budeme moci použít vždy, když rovnice obsahuje pouze součiny a podíly a bude tak možné převést každou ze stran na jedinou mocninu.

**Př. 3:** Vyřeš rovnici  $\frac{3^x}{9^{x-2}} = \frac{27^x}{9 \cdot 3^{4-x}}$ .

Zkusíme upravit rovnici do tvaru  $3^{\text{výraz1}} = 3^{\text{výraz2}}$ .

$$\frac{3^x}{(3^2)^{x-2}} = \frac{(3^3)^x}{3^2 \cdot 3^{4-x}}$$

$$\frac{3^x}{3^{2x-4}} = \frac{3^{3x}}{3^{6-x}}$$

$$3^{x-(2x-4)} = 3^{3x-(6-x)}$$

$$3^{4-x} = 3^{4x-6} \quad \text{Můžeme od rovnice } 3^{\text{výraz1}} = 3^{\text{výraz2}} \text{ přejít k rovnici } \text{výraz1} = \text{výraz2}.$$

$$4-x = 4x-6$$

$$10 = 5x$$

$$x = 2$$

$$K = \{2\}$$

**Pedagogická poznámka:** Kromě chyb při úpravách mocnin mívají studenti problémy i s tím, že zruší mocniny dříve, než rovnici upraví na tvar  $a^{\text{výraz1}} = a^{\text{výraz2}}$ . Někteří se vyhýbají mocninám ve jmenovateli a zbytečně si komplikují řešení zbytečným násobením.

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $2 \cdot 2^x \cdot 4^{2-x} = \frac{8}{2^{3x+1}}$ .

Zkusíme upravit rovnici do tvaru  $2^{\text{výraz1}} = 2^{\text{výraz2}}$ .

$$2 \cdot 2^x \cdot 4^{2-x} = \frac{8}{2^{3x+1}}$$

$$2^1 \cdot 2^x \cdot (2^2)^{2-x} = 2^3 \cdot \frac{1}{2^{3x+1}}$$

$$2^{x+1} \cdot 2^{4-2x} = 2^3 \cdot 2^{-3x-1}$$

$$2^{x+1+4-2x} = 2^{3-3x-1}$$

$$2^{5-x} = 2^{2-3x}$$

$$\text{Můžeme od rovnice } 2^{\text{výraz1}} = 2^{\text{výraz2}} \text{ přejít k rovnici } \text{výraz1} = \text{výraz2}.$$

$$5-x = 2-3x$$

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$K = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

**Př. 5:** Vyřeš rovnici  $\frac{9 \cdot 3^x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9^x}} = \frac{\sqrt[4]{3^x}}{27}$ .

Zkusíme upravit rovnici do tvaru  $3^{\text{výraz1}} = 3^{\text{výraz2}}$ .

$$\frac{9 \cdot 3^x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9^x}} = \frac{\sqrt[4]{3^x}}{27}$$

$$\frac{3^2 \cdot 3^x}{3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{(3^2)^x}} = \frac{(3^x)^{\frac{1}{4}}}{3^3}$$

$$\frac{3^{x+2}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2x}{3}}} = \frac{3^{\frac{x}{4}}}{3^3}$$

$$3^{x+2-\frac{1}{2}-\frac{2x}{3}} = 3^{\frac{x}{4}-3}$$

Můžeme od rovnice  $3^{\text{výraz1}} = 3^{\text{výraz2}}$  přejít k rovnici  $\text{výraz1} = \text{výraz2}$ .

$$x+2-\frac{1}{2}-\frac{2x}{3} = \frac{x}{4}-3 \quad / \cdot 12$$

$$12x+24-6-8x = 3x-36$$

$$x = -54$$

$$K = \{-54\}$$

**Pedagogická poznámka:** Objevují se problémy s řešením lineární rovnice vzniklé po přechodu od exponentů. Většinou připomínám, že nejvýhodnějším postupem je odstranění zlomků vynásobením číslem 12.

**Př. 6:** Vyřeš rovnici  $\sqrt[3]{2\sqrt{8}} = \sqrt[3]{16} \cdot 2$ .

Platí:  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$  přepíšeme rovnici pomocí racionálního exponentu.

$$\left(2(2^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (2^4)^{\frac{1}{3}} \cdot 2$$

$$\left(2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2$$

$$2^{\frac{5}{2x}} = 2^{\frac{4}{3}+1}$$

Můžeme od rovnice  $2^{\text{výraz1}} = 2^{\text{výraz2}}$  přejít k rovnici  $\text{výraz1} = \text{výraz2}$ .

$$\frac{5}{2x} = \frac{4}{3} + 1 \quad / \cdot 2x$$

$$5 = 8 + 2x$$

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$K = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

**Př. 7:** Vyřeš rovnici  $\frac{27}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9} \left(\frac{9}{4}\right)^{x+2}$ .

**Problém:** Zdá se, že na obou stranách máme různé základy mocnin.

**Postřeh:**  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} \Rightarrow$  zkusíme vyjádřit obě strany rovnice jako mocniny o základu  $\frac{3}{2}$ .

$$\frac{3^3}{2^3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} = \frac{2^2}{3^2} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{x+2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+4}$$

$$3-x = -2+2x+4$$

$$1 = 3x$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$K = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

**Př. 8:** Vyřeš rovnici  $\sqrt[x]{\frac{4^4}{16^x}} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

Pokusíme se přepsat všechno na mocniny dvou.

$$\left(\frac{2^8}{2^{4x}}\right)^{\frac{1}{x}} = 2^2 \cdot 2^{-x}$$

$$(2^{8-4x})^x = 2^{2-x}$$

$$2^{8x-4x^2} = 2^{2-x}$$

$$8x-4x^2 = 2-x$$

$$0 = 4x^2 - 9x + 2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8}$$

$$x_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad x_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4} \quad K = \left\{\frac{1}{4}; 2\right\}$$

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad vyžaduje použití triku. Pět minut před koncem hodiny přeruším práci studentů na předchozích příkladech, abychom si ho ještě stihli projít.

**Př. 9:** Vyřeš rovnici:  $3^x \cdot 2^{x+1} = 2 \cdot 36^{x+2}$ .

**Problém:** Zdá se, že máme mocniny tří různých základů.

Nápad: Platí  $2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow$  zkusíme vše převést na mocniny 6.

$$3^x \cdot 2^x \cdot 2 = 2 \cdot (6^2)^{x+2}$$

$$6^x \cdot 2 = 2 \cdot 6^{2x+4} \quad / : 2$$

$$6^x = 6^{2x+4} \quad \text{Můžeme od rovnice } 6^{\text{výraz1}} = 6^{\text{výraz2}} \text{ přejít k rovnici } \text{výraz1} = \text{výraz2}.$$

$$x = 2x+4$$

$$x = -4$$

$$K = \{-4\}$$

**Př. 10:** Petáková:  
strana 34/cvičení 1 a) b) d) e) h)

**Shrnutí:** Pokud se podaří exponenciální rovnici upravit do tvaru  $a^{\text{výraz1}} = a^{\text{výraz2}}$ , můžeme přejít k rovnici  $\text{výraz1} = \text{výraz2}$ .