2.9.23 Logaritmické rovnice V

Př. 1: Vyřeš rovnici $0,5^{\log_3 x}+4=4\cdot 0,5^{\log_3 x+1}$.

$0,5^{\log_3 x}+4=4\cdot 0,5^{\log_3 x}\cdot 0,5^1$

$0,5^{\log_3 x}+4=2\cdot 0,5^{\log_3 x}$

Substituce: $a=0,5^{\log_3 x}$ $\quad a+4=2a$ $\quad a=4$

$a=0,5^{\log_3 x}=4$ $\quad 0,5^{\log_3 x}=0,5^{-2}$ $\quad \log_3 x=-2$

$\log_3 x=\log_3 3^{-2}$ $\quad x=\frac{1}{9}$ $\quad K=\left\{\frac{1}{9}\right\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $3\cdot 4^{\log x}-25\cdot 2^{\log x}+8=0$.

$4^{\log x}=\left(2^2\right)^{\log x}=\left(2^{\log x}\right)^2$ $\quad 3\cdot 4^{\log x}-25\cdot 2^{\log x}+8=0$ $\quad 3\cdot\left(2^{\log x}\right)^2-25\cdot 2^{\log x}+8=0$

Substituce: $y=2^{\log x}$ $\quad 3y^2-25y+8=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-25)\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot 3\cdot 8}}{2\cdot 3}=\frac{25\pm 23}{6}$$

$y_1=\frac{25+23}{6}=8$ $\quad y_2=\frac{25-23}{6}=\frac{1}{3}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=2^{\log x_1}=8$

$2^{\log x_1}=2^3$

$\log x_1=3$

$\log x_1=\log 10^3$

$x_1=1000$

$y_2=2^{\log x_2}=\frac{1}{3}$ $\quad 2^{\log x_2}=\frac{1}{3}$

$\log_2 2^{\log x_2}=\log_2\frac{1}{3}$ $\quad \log x_2\cdot\log_2 2=\log_2\frac{1}{3}$

$\log x_2\cdot 1=-\log_2 3$ $\quad \log x_2=\log 10^{-\log_2 3}$

$x_2=10^{-\log_2 3}$

$K=\left\{1000;10^{-\log_2 3}\right\}$

Př. 3: Vyřeš rovnici $x+\log_3\left(3^x+6\right)=3$.

$\log_3 3^x+\log_3\left(3^x+6\right)=3$ $\quad \log_3\left[3^x\left(3^x+6\right)\right]=\log_3 3^3$ $\quad 3^x\left(3^x+6\right)=27$

Substituce: $y=3^x$ $\quad y(y+6)=27$ $\quad y^2+6y-27=0$ $\quad (y+9)(y-3)=0$

$y_1=-9$ $\quad y_2=3$

$y_1=3^{x_1}=-9$ nejde $\quad y_2=3^{x_2}=3$ $\quad 3^{x_2}=3^1$ $\quad x_2=1$

$K=\{1\}$

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{matrix}2x+y=12\\ \log_4 x+\log_4 y=2\end{matrix}$.

$\log_4 x+\log_4 y=2$ $\quad \log_4 xy=\log_4 4^2$ $\quad xy=16$

Z první rovnice vyjádříme y: $2x+y=12 \Rightarrow y=12-2x$.

Dosadíme do druhé rovnice: $xy=x(12-2x)=16$. $\quad 12x-2x^2=16 \quad /:2$

$6x-x^2-8=0$ $\quad x^2-6x+8=0$ $\quad (x-4)(x-2)=0$

- $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 12 - 2x_1 = 12 - 2 \cdot 4 = 4$
- $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 12 - 2x_2 = 12 - 2 \cdot 2 = 8$

$K = \{[4;4];[2;8]\}$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{matrix} \log x^2 + \log y^3 = 5 \\ \log xy = 3 \end{matrix}$.

$2\log x + 3\log y = 5$
$\log x + \log y = 3$

Substituce: $a = \log x$, $b = \log y$

$2a + 3b = 5$
$a + b = 3$

$[[1]] - 2[[2]]$ $\quad 2a + 3b = 5$
$b = -1$

dopočteme a: $2a + 3b = 2a + 3(-1) = 5 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$a = 4 = \log x \Rightarrow \log 10^4 = \log x \Rightarrow x = 10000$

$b = -1 = \log y \Rightarrow \log 10^{-1} = \log y \Rightarrow y = 0{,}1$

$K = \{[10000; 0{,}1]\}$

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{matrix} \log_2^2 2x - \log_2 x^2 + \log_2 y = 9 \\ 3\log x^2 + \log y^2 = \log y + \log x^4 \end{matrix}$.

$3\log x^2 + \log y^2 = \log y + \log x^4 \qquad \log\left(x^2\right)^3 + \log y^2 = \log x^4 y \qquad \log x^6 y^2 = \log y x^4$

$x^6 y^2 = y x^4 \qquad y = x^{-2}$

Dosadíme do první rovnice:

$\log_2^2 2x - \log_2 x^2 + \log_2 x^{-2} = 9 \qquad (\log_2 2x)^2 - \log_2 x^2 + \log_2 x^{-2} = 9$

$(\log_2 2 + \log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 2\log_2 x = 9 \qquad (1 + \log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 2\log_2 x = 9$

Substituce: $a = \log_2 x \qquad (1+a)^2 - 2a - 2a = 9 \qquad 1 + 2a + a^2 - 2a - 2a = 9$

$a^2 - 2a - 8 = 0 \qquad (a-4)(a+2) = 0 \qquad a_1 = 4 \qquad a_2 = -2$

$a_1 = \log_2 x_1 = 4 \qquad \log_2 x_1 = \log_2 2^4 \qquad a_2 = \log_2 x_2 = -2 \qquad \log_2 x_2 = \log_2 2^{-2}$

$x_1 = 16 \qquad y_1 = x_1^{-2} = 16^{-2} = \frac{1}{256} \qquad x_2 = \frac{1}{4} \qquad y_2 = x_2^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$

$K = \left\{\left[16; \frac{1}{256}\right]; \left[\frac{1}{4}; 16\right]\right\}$

Př. 7: Petáková:
strana 37, cvičení 24 d)
strana 37, cvičení 23 a), e)
strana 36, cvičení 21 b), c), d)
strana 37, cvičení 22 c), d), e)