2.9.26 Logaritmické rovnice (shrnuti)

Předpoklady: 2922

Pedagogická poznámka: Smyslem hodiny je stejně jako u jiných shrnutí nácvik „výběru metody“. S jedinou výjimkou jsou všechny příklady typickou obdobou příkladů, které jsme již řešili, a jde pouze o to, aby studenti dokázali vybrat, která z metod se k danému příkladu hodí. Pokud studenti neví, vždy se bavíme o tom, jaké rysy příklad má, co to znamená pro jejich řešení atd..

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log x^2 + \log x^4 = 3$.

Podmínky: $x \neq 0$.

Upravíme rovnici: $\log x^2 + 2\log x^2 = 3$

$3\log x^2 = 3$

$\log x^2 = 1$

$\log x^2 = \log 10$

$x^2 = 10$

$x_1 = \sqrt{10}$ $\quad x_2 = -\sqrt{10}$ $\quad K = \left\{\pm\sqrt{10}\right\}$

Pedagogická poznámka: Studenti většinou odstraní mocniny z argumentů logaritmů a tím přijdou o záporný kořen. Opět jde o to, že jsme takový příklad už řešili, studenty překvapil a měli by si tento problém pamatovat (nebo ho mít zachycený v arzenálu).

Př. 2: Vyřeš rovnici $\dfrac{\log x - 2}{\log x + 1} = \dfrac{\log x + 3}{\log x - 1}$.

Podmínky: $x > 0$.

Neznámá se vyskytuje pouze ve výrazu $\log x$ $\Rightarrow$ provedeme substituci a tím se příklad zjednoduší.

Substituce: $y = \log x$

$\dfrac{y-2}{y+1} = \dfrac{y+3}{y-1} \quad / (y+1)(y-1)$

$(y-2)(y-1) = (y+3)(y+1)$

$y^2 - 2y - y + 2 = y^2 + 3y + y + 3$

$-3y = 4y + 1$

$-1 = 7y$

$y = -\dfrac{1}{7}$

Návrat k původní proměnné:

$y = \log x = -\dfrac{1}{7}$

$\log x = \log 10^{-\frac{1}{7}}$

$x = 10^{-\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{10}}$ $\qquad K = \left\{ \frac{1}{\sqrt[7]{10}} \right\}$

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^{\log x - 3} = \frac{x}{1000}$.

Podmínky: $x > 0$.
Neznámá je exponentu $\Rightarrow$ rovnici zlogaritmujeme, abychom neznámou dostali z exponentu dolů.

$\log x^{\log x - 3} = \log \frac{x}{1000}$

$(\log x - 3)\log x = \log x - \log 1000$

$(\log x - 3)\log x = \log x - 3$

V rovnici se vyskytuje druhá mocnina logaritmu $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y = \log x$

$(y-3)y = y-3$

$y^2 - 3y = y - 3$

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$(y-3)(y-1) = 0$

$y_1 = 3 \qquad y_2 = 1$

Návrat k původní proměnné:

$y = \log x = 3$

$\log x = \log 10^3$

$x = 1000$

$y = \log x = 1$

$\log x = \log 10^1$

$x = 10$

$K = \{10; 1000\}$

Pedagogická poznámka: Nejčastějším problémem je opět vynechání závorky při úpravě

$$\log x^{\log x - 3} = \log \frac{x}{1000} \Rightarrow (\log x - 3)\log x = \log x - \log 1000.$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $2\log x^3 - 3\log\sqrt{x} + \log 2 = 2\log x + \log 4 - \frac{1}{2}\log x$.

Podmínky: $x > 0$.
Mezi logaritmy se vykytuje pouze sčítání a odčítání $\Rightarrow$ můžeme převést na tvar $\log \textit{výraz}1 = \log \textit{výraz}2$.

$2\log x^3 - 3\log\sqrt{x} + \log 2 = 2\log x + \log 4 - \frac{1}{2}\log x$

$\log\left(x^3\right)^2 - \log\left(\sqrt{x}\right)^3 + \log 2 = \log x^2 + \log 4 - \log\sqrt{x}$

$\log x^6 - \log x^{\frac{3}{2}} + \log 2 = \log x^2 + \log 4 - \log x^{\frac{1}{2}}$

$\log \frac{2x^6}{x^{\frac{3}{2}}} = \log \frac{4x^2}{x^{\frac{1}{2}}}$ odlogaritmujeme

$$\frac{2x^6}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{4x^2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{x^4}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$x^3 = 2$$

$x = \sqrt[3]{2}$ $\qquad\qquad K = \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$

Pedagogická poznámka: Častější než řešení uvedené výše je postup, při kterém studenti všechny členy upraví na substituci $a = \log x$. Získají tak rovnici $3a = \log 4 - \log 2$.

Následující úpravy už je většinou nenapadnou: $3\log x = \log \frac{4}{2}$

$\log x^3 = \log 2$

$x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$.

Př. 5: Vyřeš rovnici: $\log_9^2 9x^2 + \log_9 81x^3 = 5$.

Podmínky: $x > 0$.
Rovnice obsahuje druhou mocninu logaritmu $\Rightarrow$ musíme použít substituci. Uvnitř logaritmů jsou různé výrazy $\Rightarrow$ musíme je upravit na stejný tvar (zřejmě $\log_9 x$).

$$\left(\log_9 9x^2\right)^2 + \log_9 81x^3 = 5$$

$$\left(\log_9 9 + \log_9 x^2\right)^2 + \log_9 81 + \log_9 x^3 = 5$$

$$(1 + 2\log_9 x)^2 + 2 + 3\log_9 x = 5$$

Substituce: $y = \log_9 x$

$$(1+2y)^2 + 2 + 3y = 5$$

$$1 + 4y + 4y^2 + 2 + 3y = 5$$

$$4y^2 + 7y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 4\cdot(-2)}}{2\cdot 4} = \frac{-7 \pm 9}{8}$$

$y_1 = \frac{-7-9}{8} = -2$ $\qquad\qquad y_2 = \frac{-7+9}{8} = \frac{1}{4}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = \log_9 x_1 = -2$

$\log_9 x_1 = \log_9 9^{-2}$

$x_1 = \frac{1}{81}$

$y = \log_9 x_2 = \frac{1}{4}$

$\log_9 x_2 = \log_9 9^{\frac{1}{4}}$

$x_2 = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$K = \left\{ \frac{1}{81}; \sqrt{3} \right\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici: $\ln(3x-1) \cdot \log_2\left(x^2\right) \cdot \log_{0,5}(3-x) = 0$.

Podmínky: $3x-1>0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$, $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$, $3-x>0 \Rightarrow x<3$.
Levá strana rovnice obsahuje součin čísel, který se má rovnat nule $\Rightarrow$ rovnice vyjde, pokud se libovolný člen v součinu bude rovnat nule (jde o obdobu součinového tvaru rovnice) $\Rightarrow$ získáme tři jednoduché rovnice.

$\ln(3x-1) = 0$
$\ln(3x-1) = \ln e^0$
$3x-1=1$
$3x=2$
$x_1 = \frac{2}{3}$

$\log_2\left(x^2\right) = 0$
$\log_2\left(x^2\right) = \log_2 2^0$
$x^2 = 1$
$x_2 = 1 \qquad x_3 = -1$

$\log_{0,5}(3-x) = 0$
$\log_{0,5}(3-x) = \log_{0,5} 0,5^0$
$3-x=1$
$x_4 = 2$

Při kontrole podmínek jeden z kořenů $x_3 = -1$ vypadne: $K = \left\{ \frac{2}{3}; 1; 2 \right\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dost odlišný od všeho, co studenti u logaritmů znají, proto se jim většinou snažím poradit. Nejdříve se však snažím, aby si uvědomili, jak rovnice vypadá, že logaritmy jsou jenom „čísla“ (mezi kterými je součin) a na pravé straně je nula.

Př. 7: Vyřeš rovnici: $\ln\left\{\log_{0,5}\left[\log_\pi\left(\log_3 x - 1\right)+2\right]+2\right\} = 0$.

Rovnici budeme zvenku postupně odlogaritmovávat:
$\ln\left\{\log_{0,5}\left[\log_\pi\left(\log_3 x - 1\right)+2\right]+2\right\} = \ln 1$ - odlogaritmujeme
$\log_{0,5}\left[\log_\pi\left(\log_3 x - 1\right)+2\right]+2 = 1$
$\log_{0,5}\left[\log_\pi\left(\log_3 x - 1\right)+2\right] = -1 = \log_{0,5} 0,5^{-1}$
$\log_{0,5}\left[\log_\pi\left(\log_3 x - 1\right)+2\right] = \log_{0,5} 2$ - odlogaritmujeme
$\log_\pi\left(\log_3 x - 1\right)+2 = 2$
$\log_\pi\left(\log_3 x - 1\right) = 0 = \log_\pi \pi^0$
$\log_\pi\left(\log_3 x - 1\right) = \log_\pi 1$ - odlogaritmujeme
$\log_3 x - 1 = 1$
$\log_3 x = 2 = \log_3 3^2$
$\log_3 x = \log_3 9$ - odlogaritmujeme
$x = 9 \qquad K = \{9\}$

Př. 8: Vyřeš rovnici: $\log_x 3 + 3\log_{3x} 9 = 6\log_{x^2} 3$.

Podmínky: $x > 0$, $x \neq 1$.
Rovnice obsahuje neznámou v základech logaritmů, základy jsou různé $\Rightarrow$ použijeme vzorec na změnu základu a převedeme všechny logaritmy na základ 3 (hodně se vyskytují 3 a jejich mocniny).

$$\log_x 3 + 3\log_{3x} 9 = 6\log_{x^2} 3$$

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 x} + 3\frac{\log_3 9}{\log_3 3x} = 6\frac{\log_3 3}{\log_3 x^2}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + 3\frac{2}{\log_3 3 + \log_3 x} = 6\frac{1}{2\log_3 x}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{6}{1 + \log_3 x} = \frac{3}{\log_3 x}$$

Substituce: $y = \log_3 x$

$$\frac{1}{y} + \frac{6}{1+y} = \frac{3}{y} \quad / \, y(1+y)$$

$$1 + y + 6y = 3(1+y)$$

$$1 + y + 6y = 3 + 3y$$

$$4y = 2$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = \log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 x = \log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{3} \qquad K = \left\{\sqrt{3}\right\}$$

Shrnutí: