3.4.5 Konstrukce trojúhelníků I

Předpoklady: 3404

U konstrukčních úloh rozeznáváme dva základní typy:

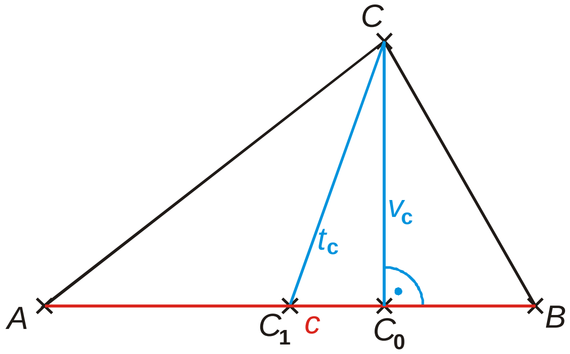
- **polohové úlohy:** jejich zadání většinou začíná slovy „Je dána ….“. Tato věta znamená, že konstrukci musíme začít prvkem, který je dán v úvodní větě.
- **nepolohové úlohy:** jejich zadání větu „Je dána…“ neobsahuje. Ze zadaných prvků si můžeme vybrat kterýkoliv a začít konstrukci od něj.

Ve všech případech je velmi vhodné začít řešení příkladů náčrtkem, ve kterém zakreslíme známé prvky trojúhelníka, u polohových úloh pak vyznačíme prvek, kterým musíme začít.

Př. 1: Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\,\text{cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky ABC se stranou AB, pro které platí $v_c = 4\,\text{cm}$, $t_c = 6\,\text{cm}$.

Polohová úloha $\Rightarrow$ jako první rýsujeme úsečku *AB*.

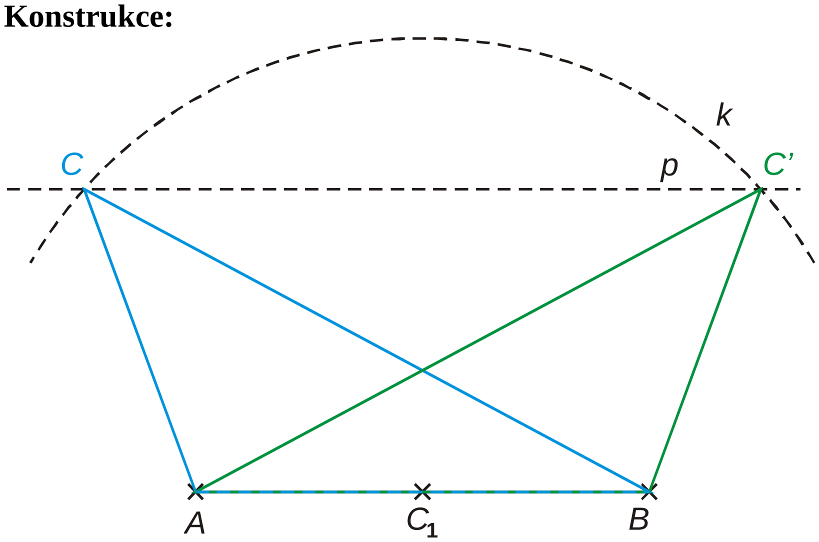
Náčrtek:



Hledáme vrchol *C*:

- známe výšku v_c $\Rightarrow$ bod *C* leží na rovnoběžce s úsečkou *AB* vzdálené o v_c,
- známe těžnici t_c $\Rightarrow$ bod C leží na kružnici $k(C_1; t_c)$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

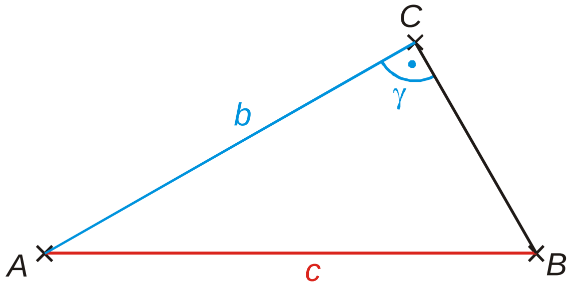
1. $AB, |AB| = c = 6\,\text{cm}$
2. $p;\ p \parallel AB; |pAB| = 4\,\text{cm}$
3. $C_1; C_1$ *je střed AB*
4. $k, k(C_1; t_c = 6\,\text{cm})$
5. $C, C', \{C, C'\} = k \cap p$
6. $\Delta ABC, \Delta ABC'$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky *p* s kružnicí *k*.

Př. 2: Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\,\text{cm}$. Sestroj všechny pravoúhlé trojúhelníky *ABC* se stranou AB a pravým úhlem γ, pro které platí $b = 5\,\text{cm}$.

Polohová úloha $\Rightarrow$ jako první rýsujeme úsečku *AB*.

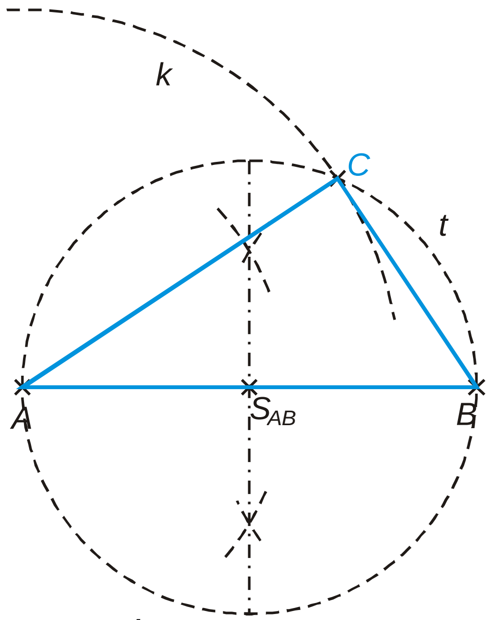
Náčrtek:



Hledáme vrchol *C*:

- známe stranu *b* $\Rightarrow$ bod *C* leží na kružnici $k(A;b)$,
- známe úhel $\gamma = 90°$ $\Rightarrow$ bod C leží na kružnici $t\left(S_{AB};\frac{c}{2}\right)$ (Thaletova kružnice nad stranou *c*).

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $AB, |AB| = c = 6\,\text{cm}$
2. $k; k(A; b = 5\,\text{cm})$
3. $t; t\left(S_{AB}; \frac{c}{2} = 3\,\text{cm}\right)$
4. $C, \{C\} = k \cap t$
5. ΔABC

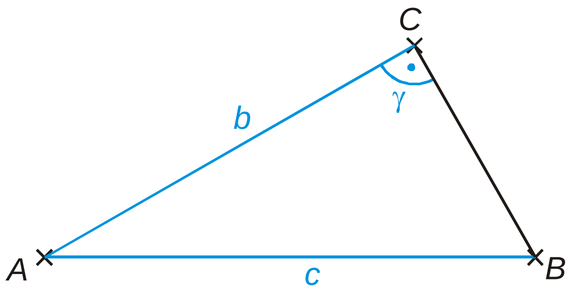
Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině žádné nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnic *k* a *t*.

Pedagogická poznámka: Při kreslení náčrtků kontroluji, jestli jsou nakreslené trojúhelníky alespoň přibližně pravoúhlé.

Př. 3: Sestroj trojúhelník *ABC*, pro který platí $c = 6\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ a $\gamma = 90°$.

Nepolohová úloha $\Rightarrow$ můžeme zvolit prvek, který rýsujeme jako první.

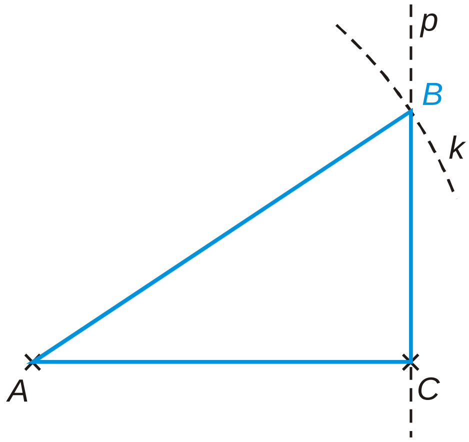
Náčrtek:



Pokud začneme od strany *c*, jde o stejnou úlohu jako v příkladě 2.
Začneme stranou *b* $\Rightarrow$ hledáme vrchol *B*:

- známe stranu *c* $\Rightarrow$ bod *B* leží na kružnici $k(A;c)$,
- známe úhel $\gamma = 90°$ $\Rightarrow$ můžeme narýsovat polopřímku *CB*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

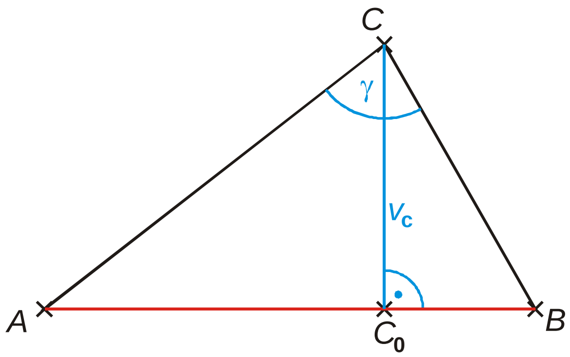
1. $AC, |AC| = b = 5\,\text{cm}$
2. $k; k(A; c = 6\,\text{cm})$
3. $p;\ p \perp AC; C \in p$
4. $B, \{B\} = k \cap p$
5. ΔABC

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině žádné nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice *k* a přímky *p*.

Pedagogická poznámka: Studentům, kteří jsou hodně napřed a myslí si, že příklad 3 je stejný jako příklad 2, říkám nejdřív, že to není pravda a nechám je přemýšlet samotné. Problém shodnosti obou příkladů pak řešíme s celou třídou, aby si všichni uvědomili rozdíl (v příkladu 2. je dáno, jak musíme začít, v příkladu 3 si můžeme celý postup zvolit. Pokud máme dost času, nechávám studenty rýsovat postup od strany *b*, jinak ihned přecházíme na další příklady.

Př. 4: Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\,\text{cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky *ABC* se stranou AB, pro které platí $v_c = 3\,\text{cm}$, $\gamma = 60°$.

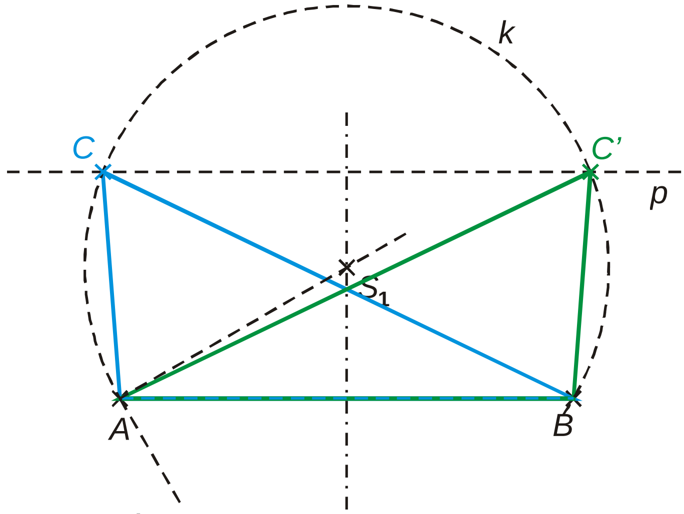
Polohová úloha $\Rightarrow$ jako první rýsujeme úsečku *AB*.
Náčrtek:



Hledáme vrchol *C*:

- známe výšku v_c $\Rightarrow$ bod *C* leží na rovnoběžce s úsečkou *AB* vzdálené o v_c,
- známe úhel $\gamma = 60°$ $\Rightarrow$ bod C leží na množině bodů, ze které je úsečka *AB* vidět pod úhlem $60°$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

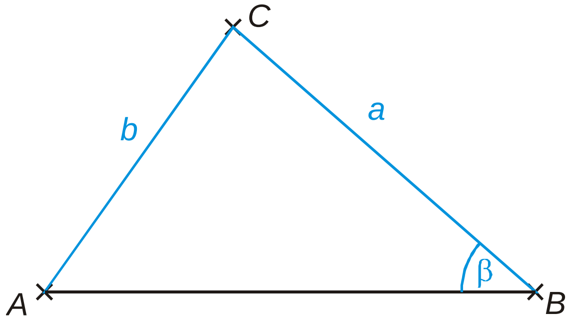
1. $AB, |AB| = c = 6\,\text{cm}$
2. $p; p \parallel AB; |pAB| = 3\,\text{cm}$
3. $k; k = \{X \in \mapsto ABC; |\sphericalangle AXB| = 60°\}$
4. $C, C', \{C, C'\} = k \cap p$
5. $\Delta ABC, \Delta ABC'$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky *p* s kružnicí *k*.

Př. 5: Sestroj trojúhelník *ABC*, pro který platí $a = 6\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ a $\beta = 50°$. Najdi alespoň dva různé postupy konstrukce vycházející od dvou různých zadaných prvků a porovnej jejich výhodnost.

Nepolohová úloha $\Rightarrow$ můžeme zvolit prvek, který rýsujeme jako první.

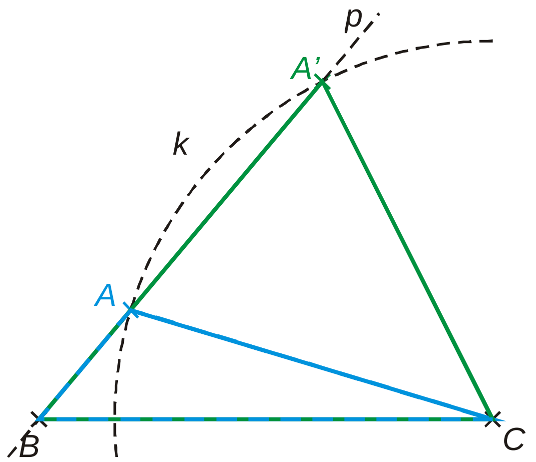
Náčrtek:



Začneme stranou *a* $\Rightarrow$ hledáme vrchol *A*:

- známe stranu *b* $\Rightarrow$ bod *A* leží na kružnici $k(C; b)$,
- známe úhel $\beta = 50°$ $\Rightarrow$ můžeme narýsovat polopřímku *BA*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $BC, |BC| = a = 6\,\text{cm}$

2. $k; k(C; b = 5\,\text{cm})$

3. $p; |\sphericalangle p \leftrightarrow BC| = 50°; B \in p$

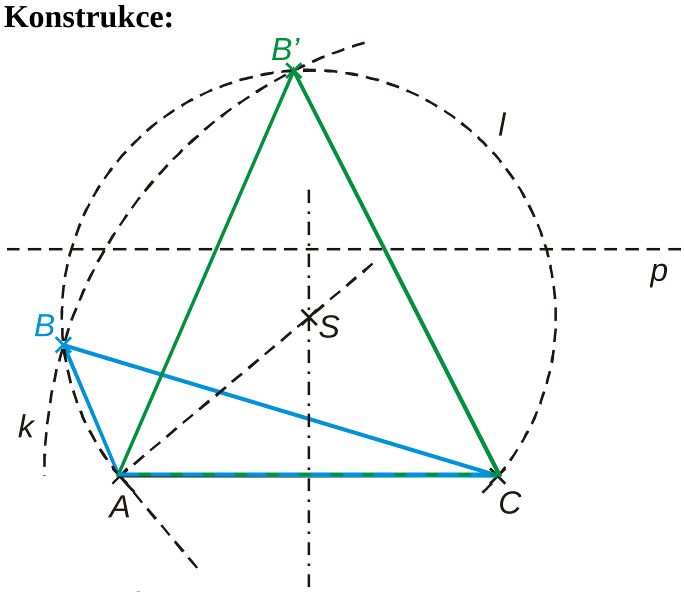
4. $A, A', \{A, A'\} = k \cap p$

5. $\Delta ABC, \Delta ABC'$

Začneme stranou *b* $\Rightarrow$ hledáme vrchol *B*:

- známe stranu *a* $\Rightarrow$ bod *B* leží na kružnici $k(C; a)$,
- známe úhel $\beta = 50°$ $\Rightarrow$ bod *B* leží na množině bodů, ze které je úsečka *AC* vidět pod úhlem $50°$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $AC, |AC| = b = 5\,\text{cm}$

2. $k; k(C; a = 6\,\text{cm})$

3. $l; l = \{X \in \mapsto ACB; |\sphericalangle AXB| = 50°\}$

4. $B, B', \{B, B\} = k \cap l$

5. $\Delta ABC, \Delta ABC'$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků přímky *p* s kružnicí *k* (případně kružnic *k* a *l*).

Pedagogická poznámka: Pokud si ukážete řešení obou možných postupů na tabuli, zkuste se zeptat studentů, jak je možné, že při prvním řešení mám dvě možnosti polohy bodu *A*, zatímco při druhém postupu dvě možnosti polohy bodu *B*, i přes to, že jde o řešení stejného příkladu.

Pedagogická poznámka: V hodině samozřejmě chci, aby studenti řešili příklad druhým protože nejtěžším způsobem.

Dodatek: Předchozí příklad je možné řešit i umístěním úhlu β. Jde však o stejný postup jako v při umístění strany *a*.

Př. 6: Petáková:
strana 77/cvičení 17 c)
strana 77/cvičení 14 a)

Shrnutí: