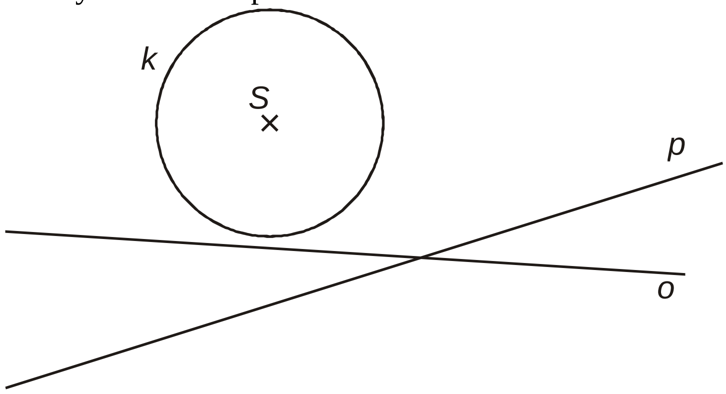
3.5.3 Příklady na osovou souměrnost

Předpoklady: 3502

Př. 1: Jsou dány dvě různoběžné přímky *o*, *p* a kružnice $k(S,r)$. Sestroj úsečku *XY* tak, aby byla kolmá k přímce o, bod *X* ležel na přímce *p*, bod *Y* ležel na kružnici *k* a střed úsečky *XY* ležel na přímce *o*.



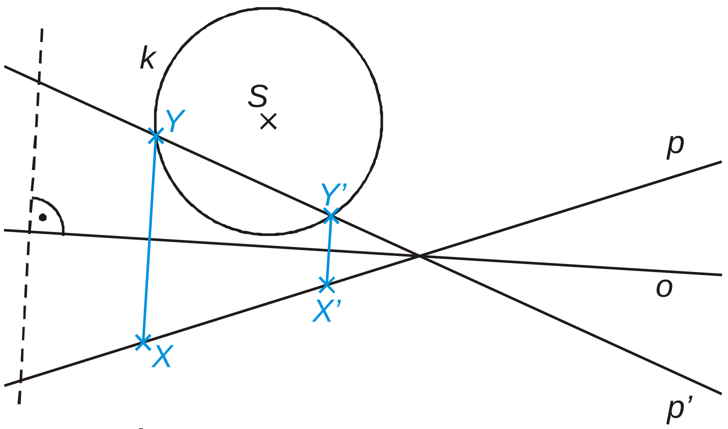
Problém:

- bod *X* leží na přímce *p*, ale nevíme kde
- bod *Y* leží na kružnici *k*, ale nevíme kde

$\Rightarrow$ o obou hledaných bodech máme neúplnou informaci, která nám neumožňuje jejich sestrojení, přesto je příklad evidentně dostatečně zadaný a nemá nekonečně mnoho řešení

Nápad: zatím nepoužitá informace ze zadání: úsečka *XY* je k přímce *o* kolmá a leží na ní její střed $\Rightarrow$ body *XY* jsou osově souměrné podle osy *o* $\Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být *X* (tedy celou přímku *p*) a zobrazíme je v osové souměrnosti $O(o)$, hledaný bod *X* se musí zobrazit na bod *Y* (tedy na kružnici *k*) $\Rightarrow$ hledaný bod *Y* najdeme jako průsečík kružnice *k* a přímky p' (bod *X* pak pomocí bodu *Y* a kolmice na přímku *o*)

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. p, o, k
2. $p'; O(o): p \rightarrow p'$
3. $Y; Y = p' \cap k$
4. $X; O(o): Y \rightarrow X$
5. XY

Diskuse: Úloha může mít 0 – 2 řešení v závislosti na vzájemné poloze přímek *p*, *o* a kružnice *k*.

Dodatek: Příklad samozřejmě můžeme řešit i zobrazením kružnice *k* v osové souměrnosti $O(o)$.

Př. 2: Je dána přímka *o* a na ní bod *C*. Dále jsou dány dvě navzájem různoběžné přímky *a*, *b* obě různé od přímky *o*. Sestroj všechny rovnoramenné trojúhelníky *ABC* tak, aby strana *AB* byla základnou, těžnice t_C ležela na přímce *o* a platilo $A \in a$, $b \in B$.

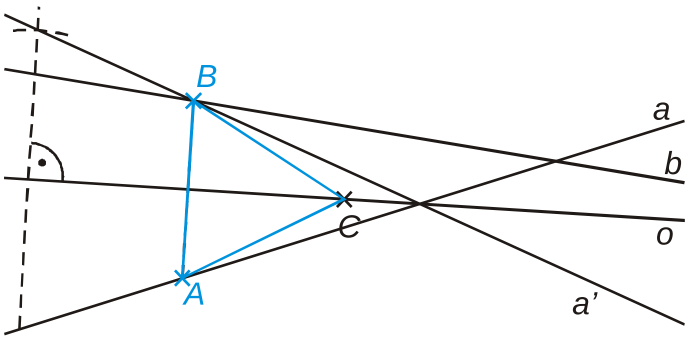
Problém:

- vrchol *A* leží na přímce *a*, ale nevíme kde
- vrchol *B* leží na přímce *b*, ale nevíme kde

$\Rightarrow$ o obou hledaných bodech máme neúplnou informaci, která nám neumožňuje jejich sestrojení, přesto je příklad evidentně dostatečně zadaný a nemá nekonečně mnoho řešení

Nápad: zatím nepoužitá informace ze zadání: body *A*, *B* jsou vrcholy základny rovnoramenného trojúhelníka, všechny rovnoramenné trojúhelníky jsou osově souměrné (osa souměrnosti trojúhelníka se shoduje s osou základny) $\Rightarrow$ body *A*, *B* jsou osově souměrné v souměrnosti $O(o)$ $\Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být *A* (tedy celou přímku *a*) a zobrazíme je v osové souměrnosti $O(o)$, hledaný bod *A* se musí zobrazit na bod *B* (tedy na přímku *b*) $\Rightarrow$ hledaný bod *B* najdeme jako průsečík přímek *b* a a' (bod *A* pak pomocí bodu *B* a kolmice na přímku *o*)

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. a, b, o
2. $a'; O(o): a \rightarrow a'$
3. $B; B = a' \cap b$
4. $A; O(o): B \rightarrow A$
5. ABC

Diskuse: Úloha má vždy jedno řešení (přímky a' a *b* jsou různoběžné a mají vždy jeden průsečík).

Dodatek: Příklad samozřejmě můžeme řešit i zobrazením přímky *b* v osové souměrnosti $O(o)$.

Př. 3: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

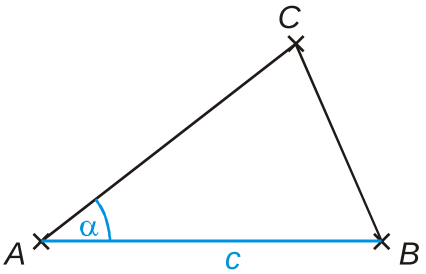
V obou příkladech:

- hledali jsme dva body, oba body byly určeny pouze částečně
- zbývající informace v zadání obsahovali informaci o vzájemném vztahu hledaných bodů (konkrétně osová souměrnost)
- pomocí osové souměrnosti (zobrazením všech „podezřelých“ bodů) jsme informace o poloze jednoho bodu použili ke konstrukci druhého bodu
- první bod jsme pak pomocí osové souměrnosti nalezli jako obraz zkonstruovaného druhého bodu

$\Rightarrow$ osová souměrnost (jak uvidíme dále shodnosti obecně) nám umožňuje „dát dohromady“ částečné informace o konstrukci dvou bodů

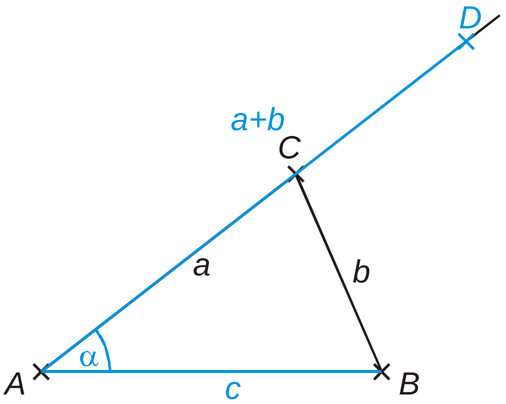
Př. 4: Sestroj trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $c = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 50°$, $a + b = 7\,\text{cm}$.

Náčrtek:



Jak do náčrtku zakreslit délku $a+b$?

Zkusíme sledovat konstrukci: snadno sestrojíme trojúhelník *ABD*



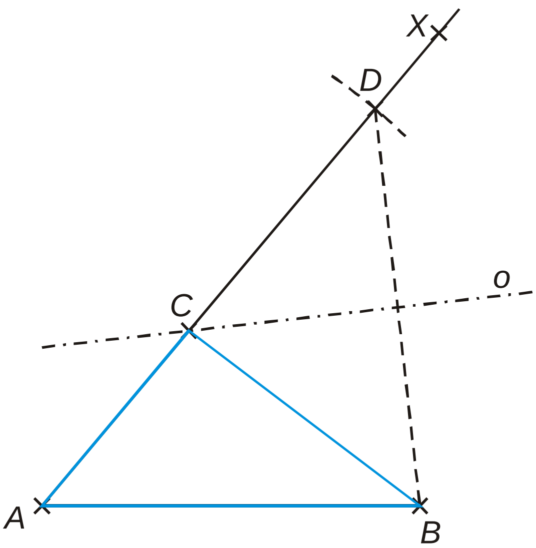
Jak zjistíme polohu bodu *C* na přímce *AD*?

Platí $|AD| = a+b$, $|AC| = a$ $\Rightarrow$ $|CD| = b$ $\Rightarrow$ trojúhelník *BCD* je rovnoramenný a tedy i osově souměrný podle osy úsečky *BD* $\Rightarrow$ vrchol *C* leží na:

- úsečce *AD*
- ose úsečky *BD*

$\Rightarrow$ vrchol *C* snadno nalezneme jako průsečík

Konstrukce:



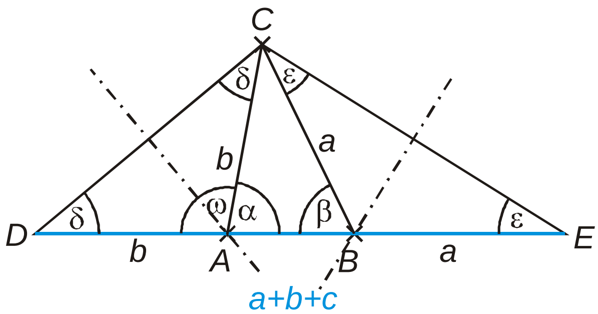
Zápis konstrukce:

1. $AB; |AB| = c = 5\,\text{cm}$
2. $\sphericalangle BAX; |\sphericalangle BAX| = 50°$
3. $D; D \in \mapsto AX; |AD| = a+b = 12\,\text{cm}$
4. o; osa úsečky *BD*
5. $C; C = AD \cap o$
6. ΔABC

Diskuse: Úloha má jedno řešení.

Př. 5: Sestroj trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $o = 10\,\text{cm}$, $\alpha = 70°$, $\beta = 60°$.

Náčrtek:



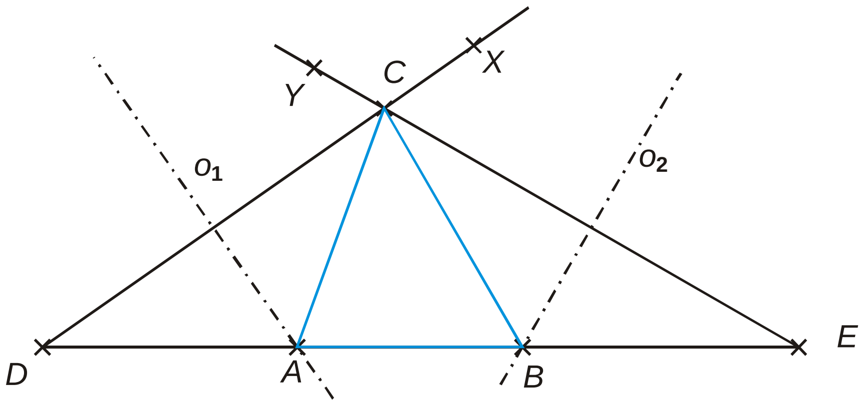
Využijeme zkušenosti z předchozího příkladu (hledání vrcholu pomocí osové souměrnosti). Zkoumáme rovnoramenný trojúhelník *DAC*: pro úhel ω platí: $\omega = 180° - \alpha$ (zbytek do $180°$), ze součtu úhlů v trojúhelníku: $\omega + \delta + \delta = 180° - \alpha = 180°$

$2\delta = \alpha \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}\alpha$.

Podobně platí: $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta$

$\Rightarrow$ můžeme sestrojit trojúhelník *DEC* a pak pomocí osových souměrností najít vrcholy *A*, *B*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $DE; |DE| = c = 10\,\text{cm}$
2. $\sphericalangle EDX; |\sphericalangle EDX| = 35°$
3. $\sphericalangle DEY; |\sphericalangle DEY| = 30°$
4. $C; C \in \mapsto DX \cap \mapsto EY$
5. o_1; osa úsečky DC
6. o_2; osa úsečky EC
7. $A; A \in o_1 \cap DE$
8. $B; B \in o_2 \cap DE$
9. ΔABC

Př. 6: Petáková:
strana 79/cvičení 39
strana 80/cvičení 42
strana 80/cvičení 49 a) d)

Shrnutí: Osová souměrnost nám umožňuje dát dohromady částečné informace o konstruovaných bodech.