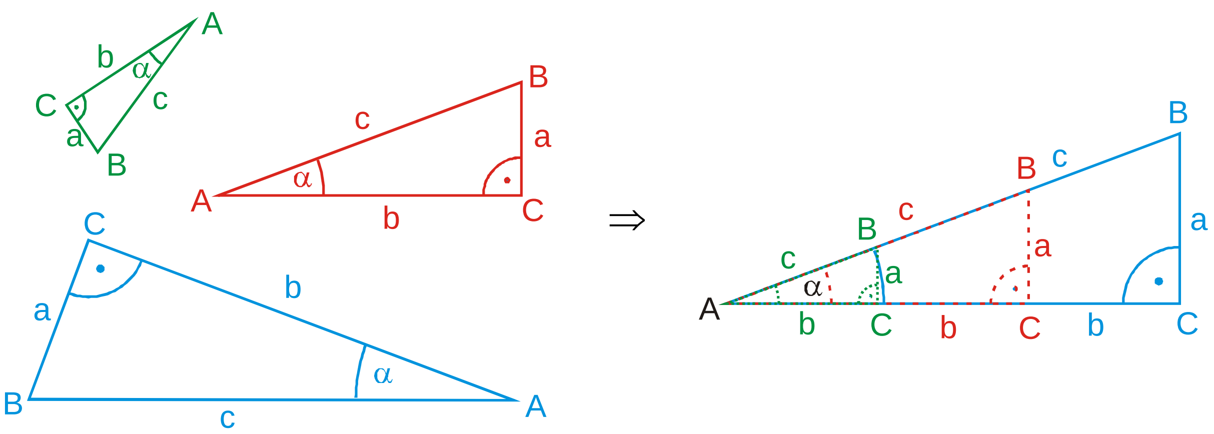
4.2.1 Goniometrické funkce ostrého úhlu

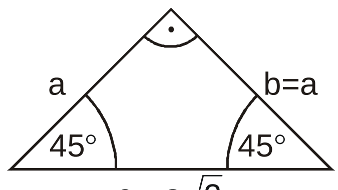


1. rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník

Délka přepony pomocí Pythagorovy věty:

$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$



Př. 1: Urči pomocí rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $x = 45°$.

$$\sin 45° = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{tg} 45° = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45° = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{cotg} 45° = \frac{přilehlá}{protilehlá} = \frac{a}{a} = 1$$

2. rovnostranný trojúhelník

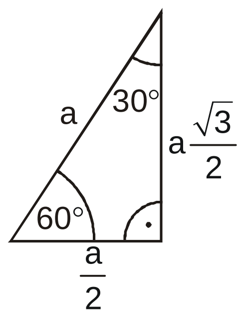
Výška na libovolnou stranu rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky s úhly $30°$ a $60°$.

Délka delší odvěsny pomocí Pythagorovy věty:

$C^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow B^2 = C^2 - A^2$

$B^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$

$B = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$



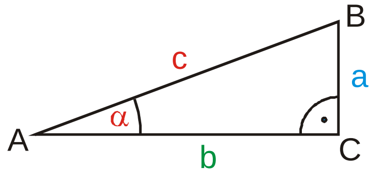
Př. 2: Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $x = 60°$.

$$\sin 60° = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

Př. 3: Urči pomocí poloviny rovnostranného trojúhelníku hodnoty goniometrických funkcí pro úhel $x = 60°$.

$$\sin 30° = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\textit{protilehlá}}{\textit{přilehlá}} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} 30° = \dfrac{\textit{přilehlá}}{\textit{protilehlá}} = \dfrac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$



$\sin x = \dfrac{a}{c}$ $\Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\sin x$ **zvětšuje**

$\cos x = \dfrac{b}{c}$ $\Rightarrow$ s **rostoucím úhlem** α se hodnota $\cos x$ **zmenšuje**

Úhel [°]	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
$\sin(x)$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$
$\operatorname{tg}(x)$	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	
$\operatorname{cotg}(x)$		$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Př. 4: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 30°$ má velikost přepony $c = 4\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí: $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$.

Pro stranu a: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \Rightarrow a = \sin\alpha \cdot c = \sin 30° \cdot 4 = 2\,\text{cm}$.

Pro stranu b: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = \cos\alpha \cdot c = \cos 30° \cdot 4 = 3{,}46\,\text{cm}$.

Př. 5: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 40°$ má velikost odvěsny $a = 9\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pro β platí: $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 40° = 50°$.

Pro stranu c: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \Rightarrow c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{9}{\sin 40°} = 14{,}00\,\text{cm}$.

Pro stranu b: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} \Rightarrow b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{9}{\operatorname{tg} 40°} = 10{,}73\,\text{cm}$.

Př. 6: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem β a s úhlem $\alpha = 25°$ má velikost odvěsny $a = 10\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

Pravým úhlem v trojúhelníku je β $\Rightarrow$ goniometrické funkce musíme používat ve tvaru $\sin\alpha = \dfrac{\textit{protilehlá}}{\textit{přepona}}$ (platí vždy) ne ve tvaru $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ (platí pouze u trojúhelníků s pravým úhlem γ).

Pro γ platí: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 25° - 90° = 65°$.

Pro stranu b: $\sin\alpha = \dfrac{a}{b} \Rightarrow b = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{10}{\sin 25°} = 23{,}66\,\text{cm}$.

Pro stranu c: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{c} \Rightarrow c = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{10}{\operatorname{tg} 25°} = 21{,}45\,\text{cm}$.