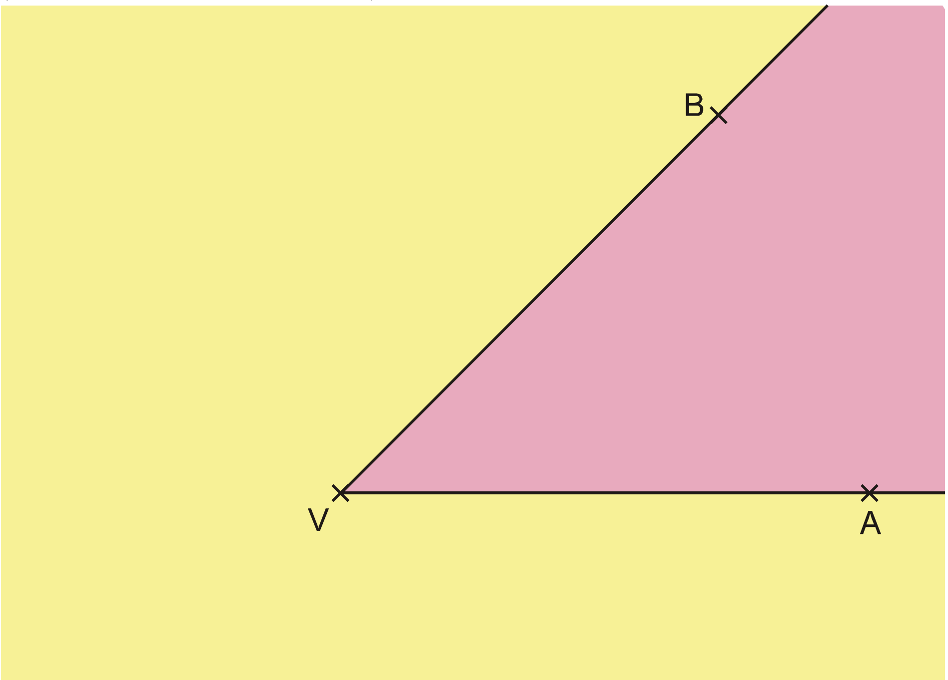
4.2.4 Orientovaný úhel I

Předpoklady: 3508

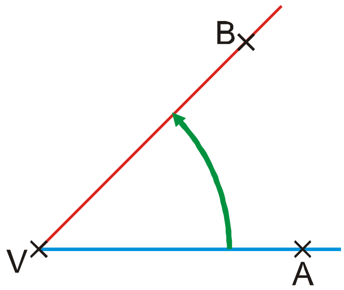
Definice úhlu ze základní školy:
Úhel je část roviny ohraničená dvojicí polopřímek se společným počátečním bodem (konvexní a nekonvexní úhel).



Nevýhody této definice:

- Nevíme, jaký úhel máme na mysli (Růžový konvexní nebo žlutý nekonvexní?).
- Když chceme pomocí úhlu popsat otáčení, nevíme, co popisujeme (Točí se nahoru nebo dolu?).

Orientovaný úhel je uspořádaná dvojice polopřímek (VA, VB) se společným počátkem V. Píšeme: $\widehat{AVB}$ (VA - počáteční rameno, VB - koncové rameno, V = vrchol).
$\Rightarrow$ Úhel vznikne otočením polopřímky.



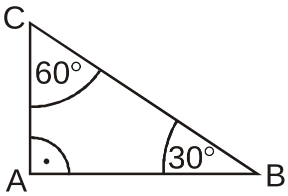
Dále budeme vždy značit počáteční rameno modře, konečné červeně. Směr otáčení bude vyznačen šipkou.

Pokud máme jednoznačně nakreslit $\widehat{AVB} = 30^\circ$, musíme vědět, co je kladný a co záporný směr otáčení. $\Rightarrow$

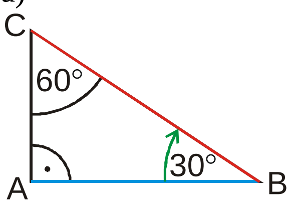
- **Za kladné považujeme otáčení proti směru hodinových ručiček.**
- **Za záporné považujeme otáčení po směru hodinových ručiček.**

Př. 1: Na obrázku je nakreslen trojúhelník ABC. Urči velikost orientovaných úhlů:

a) $\widehat{ABC}$ b) $\widehat{ACB}$ c) $\widehat{CAB}$ d) $\widehat{CBA}$

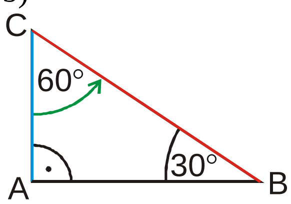


a)



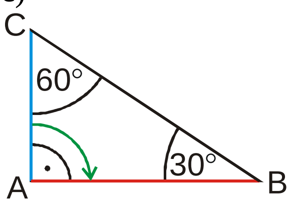
Otáčíme po směru hodinových ručiček $\Rightarrow$ $\widehat{ABC} = -30°$.

b)



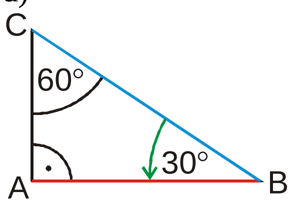
Otáčíme proti směru hodinových ručiček $\Rightarrow$ $\widehat{ACB} = 60°$.

c)



Otáčíme po směru hodinových ručiček $\Rightarrow$ $\widehat{CAB} = -90°$.

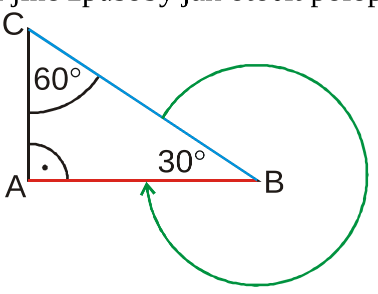
d)



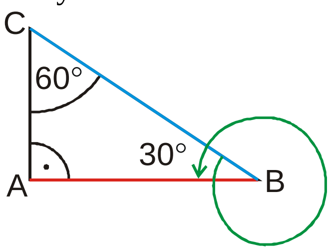
Otáčíme proti směru hodinových ručiček $\Rightarrow$ $\widehat{CBA} = 30°$.

Poznámka: V celém zbytku hodiny budeme pod trojúhelníkem *ABC* rozumět trojúhelník z předchozího příkladu.

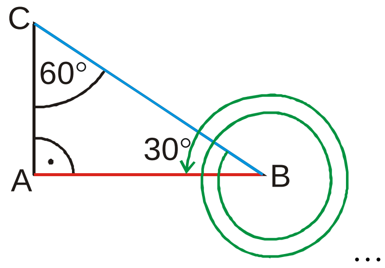
Existují i jiné způsoby jak otočit polopřímku *BC* do polopřímky *BA*:



$\widehat{CBA} = -330°$



$\widehat{CBA} = 390°$

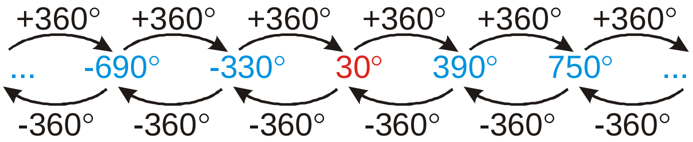


$\widehat{CBA} = 750°$

Podobných možností je evidentně nekonečně mnoho $\Rightarrow$ zdá se, že jsme přešli z bláta do louže. Zkusíme najít systém v získaných hodnotách.

Postřeh: Z obrázku je vidět, že kladné hodnoty se liší vždy o jednu otáčku ($360°$).

Seřadíme hodnoty podle velikosti: $\widehat{CBA} = -330° \quad 30° \quad 390° \quad 750°$.



Všechna ta čísla jsou správně! Liší se o násobky $360°$, tedy o násobky celých otáček (když se otočíme o celou otáčku, ocitneme se na stejném místě).

Nejhezčí hodnota $30°$ (nejmenší kladné číslo) = **základní velikost orientovaného úhlu** $\widehat{CBA}$.

Základní velikostí úhlu nazýváme velikost α, pro kterou platí $\alpha \in \langle 0;360°)$

Př. 2: Zformuluj větu o základní velikosti úhlu $\widehat{AVB}$ v obloukové míře.

Převedeme krajní body intervalu: $360° = 2\pi\,\mathrm{rad}$.

Základní velikostí úhlu nazýváme velikost α, pro kterou platí $\alpha \in \langle 0;2\pi)$.

Úhel se dá zapsat nekonečně mnoho čísly (velikostmi úhlu). Všechny velikosti úhlů se navzájem liší o násobek $360°$.

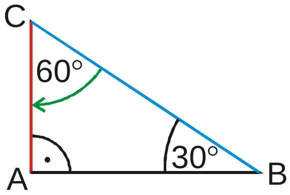
Velikostí orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$, jehož základní velikostí je α, se nazývá každé číslo $\alpha + k \cdot 360°$, kde $k \in Z$.

Př. 3: Zformuluj větu o všech velikostech orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ v obloukové míře.

K základní velikosti přidáváme násobky jedné otáčky $\Rightarrow$ $360° = 2\pi\,\mathrm{rad}$.

Velikostí orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$, jehož základní velikostí je α, se nazývá každé číslo $\alpha + k \cdot 2\pi$, kde $k \in Z$.

Př. 4: Napiš základní a tři další velikosti úhlu $\widehat{BCA}$ v trojúhelníku ABC.



$\Rightarrow \ \widehat{BCA} = -60°$.

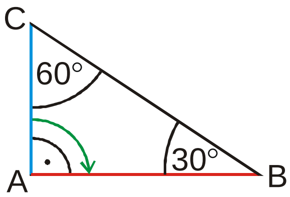
-60° není základní velikostí (hodnota je záporná) $\Rightarrow$ připočteme $360°$.

$-60^\circ + 360° = 300°$ - základní velikost $300° \in \langle 0; 360°)$.

Další hodnoty získáme připočtením nebo odečtením $360°$:

- $300° + 360° = 660^\circ$,
- $-60° - 360° = -420^\circ$.

Př. 5: Napiš základní a tři další velikosti úhlu $\widehat{CAB}$ v trojúhelníku ABC. Vše vyjádři v obloukové míře.



$\Rightarrow \ \widehat{CAB} = -90° = -\frac{\pi}{2}$.

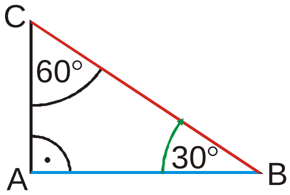
$-\frac{\pi}{2}$ není základní velikostí (je záporná) $\Rightarrow$ připočteme 2π.

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{-\pi + 4\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$ - základní velikost $\frac{3}{2}\pi \in \langle 0; 2\pi)$.

Další hodnoty získáme připočtením nebo odečtením 2π:

- $-\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{5}{2}\pi$,
- $\frac{3}{2}\pi + 2\pi = \frac{7}{2}\pi$.

Př. 6: Napiš základní a tři další velikosti úhlu $\widehat{ABC}$ v trojúhelníku ABC. Vše vyjádři v obloukové míře.



$\Rightarrow \ \widehat{ABC} = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}$.

$-\frac{\pi}{6}$ není základní velikostí (je záporná) $\Rightarrow$ připočteme 2π.

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{-\pi + 12\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$ - základní velikost $\frac{11}{6}\pi \in \langle 0; 2\pi)$.

Další hodnoty získáme připočtením nebo odečtením 2π :

- $-\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{13}{6}\pi$,
- $\frac{11}{6}\pi+2\pi=\frac{23}{6}\pi$.

Pedagogická poznámka: Před následujícím příkladem synchronizuji třídu, aby všichni dělali to samé.

Př. 7: Rozhodni, které z následujících čísel jsou velikosti úhlu $\beta=330°$.
a) $690°$ b) $1740°$ c) $2490°$ d) $-1500°$

a) Pokud je úhel $690°$ velikostí úhlu β musí platit: $690°=330°+k\cdot 360°$.
Upravíme: $690°-330°=k\cdot 360°$ $\Rightarrow$ rozdíl $690°-330°$ by měl být násobek 360.
$690°-330°=360°$ $\Rightarrow$ $690°$ je velikost úhlu β.

b) Má platit $1740°=330°+k\cdot 360°$ $\Rightarrow$ rozdíl $1740°-330°$ by měl být násobek 360.
$1740°-330°=1410°$
$\frac{1410°}{360°}=3,9...$ $\Rightarrow$ $1740°$ není velikost úhlu β.

c) Má platit $2490°=330°+k\cdot 360°$ $\Rightarrow$ rozdíl $2490°-330°$ by měl být násobek 360.
$2490°-330°=2160°$
$\frac{2160°}{360°}=6$ $\Rightarrow$ $2490°$ je velikost úhlu β.

d) Má platit $-1500°=330°+k\cdot 360°$ $\Rightarrow$ rozdíl $-1500°-330°$ by měl být násobek 360.
$-1500°-330°=-1830°$
$\frac{-1830°}{360°}=-5,08...$ $\Rightarrow$ $-1500°$ není velikost úhlu β.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají pochyby o tom, zda by v bodě d) neměli kvůli zápornému znaménku úhlu $-1500°$ neměli tuto hodnotu k číslu $330°$ přičítat. Těm, kteří nejsou spokojení s tím, že záporná hodnota není z matematického hlediska důvod k jinému chování, píšu rovnici:
$330-360-360-...-360=-1500$
$-360-360-...-360=-1500-330$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je z algoritmického hlediska shodný s předchozím. Nevidím to jako závadu, studenti se učí jak se vyrovnat se zlomky a obloukovou mírou.

Př. 8: Rozhodni, které z následujících čísel jsou velikosti úhlu $\alpha = \frac{5}{6}\pi$.

a) $\frac{29}{6}\pi$ b) $\frac{131}{6}\pi$ c) $\frac{257}{6}\pi$ d) $-\frac{175}{6}\pi$

a) Pokud je úhel $\frac{29}{6}\pi$ základní velikostí úhlu α musí platit: $\frac{29}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Upravíme: $\frac{29}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = k \cdot 2\pi$ $\Rightarrow$ rozdíl $\frac{29}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi$ by měl být násobek 2π.

$\frac{29}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{24}{6}\pi = 4\pi = 2 \cdot 2\pi$ $\Rightarrow$ $\frac{29}{6}\pi$ je velikost úhlu α.

b) Má platit $\frac{131}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow$ rozdíl $\frac{131}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi$ by měl být násobek 2π.

$\frac{131}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{126}{6}\pi = 21\pi \neq k \cdot 2\pi$ $\Rightarrow$ $\frac{131}{6}\pi$ není velikost úhlu α.

c) Má platit $\frac{257}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow$ rozdíl $\frac{257}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi$ by měl být násobek 2π.

$\frac{257}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{252}{6}\pi = 42\pi = 21 \cdot 2\pi$ $\Rightarrow$ $\frac{257}{6}\pi$ je velikost úhlu α.

d) Má platit $-\frac{175}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow$ rozdíl $-\frac{175}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi$ by měl být násobek 2π.

$-\frac{175}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = -\frac{180}{6}\pi = -30\pi = -15 \cdot 2\pi$ $\Rightarrow$ $-\frac{175}{6}\pi$ je velikost úhlu α.

Shrnutí: Orientovaný úhel má nekonečně mnoho velikostí, které se liší o násobky 2π.