

5.1.6 Vzájemná poloha dvou přímek

Předpoklady: 5105

Planimetrie: dvě možnosti pro vzájemnou polohu přímek

- různoběžky – právě jeden společný bod (různý směr)
- rovnoběžky – žádný společný bod (stejný směr)

Př. 1: Najdi všechny možné vzájemné polohy přímek v prostoru a modeluj je pomocí tužek.

Možnosti vzájemné polohy dvou přímek v prostoru:

- **různoběžky** – právě jeden společný bod (různý směr, určují rovinu)
- **rovnoběžky** – žádný společný bod (stejný směr, určují rovinu)
- **mimoběžky** – žádný společný bod (různý směr, neurčují rovinu, tato možnost nemůže nastat v rovině)

určit vzájemnou polohu přímek, které si můžeme prohlédnout z více stran není těžké, horší je to pokud máme k dispozici pouze rovnoběžný průmět

Pedagogická poznámka: U všech následujících příkladů by se studenti měli snažit určit polohu přímek nejdříve pouze z obrázku, pak nakreslením obrázku při pohledu z jiné strany a teprve jako definitivní potvrzení nebo poslední záchranu by měli používat krychličky.

Př. 2: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Urči vzájemnou polohu přímek:

a) AB, CG

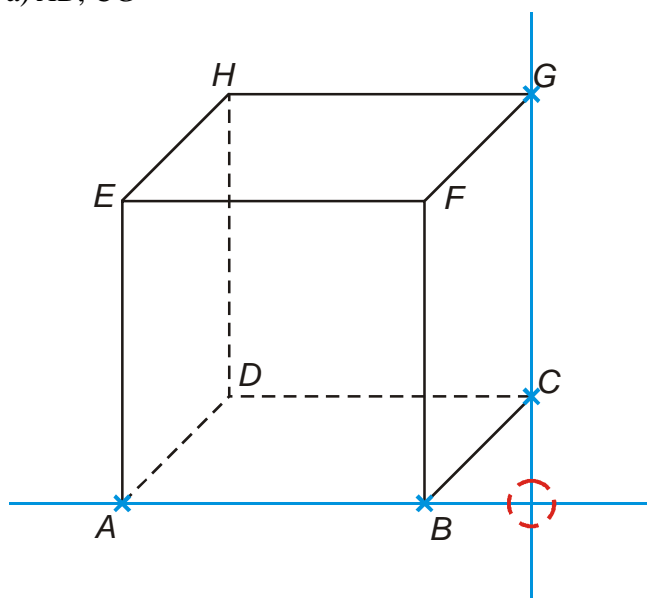
b) AS_{CG}, BD

c) $AB, S_{BC}S_{CD}$

d) $BC, S_{AE}S_{DH}$

e) EC, BH

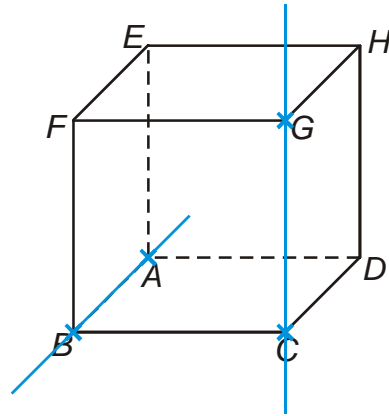
a) AB, CG



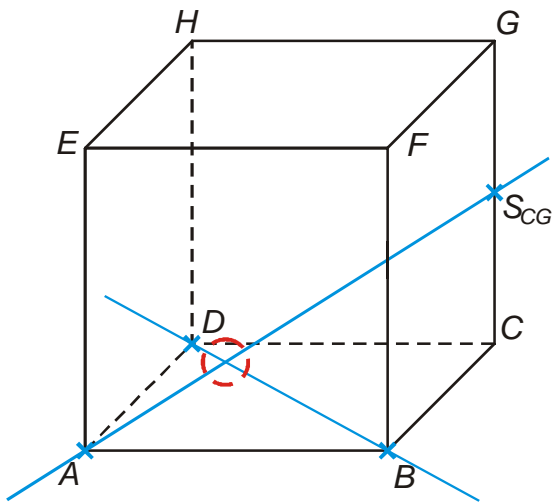
zdá se, že přímky AB a CG jsou různoběžné, ale jejich „průsečík“ na průmětně je pouze zdánlivý:

- přímka AB leží v přední stěně
- přímka CG leží v zadní stěně

⇒ nikdy se nemohou protnout ⇒ přímky AB a CG jsou **mimoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku



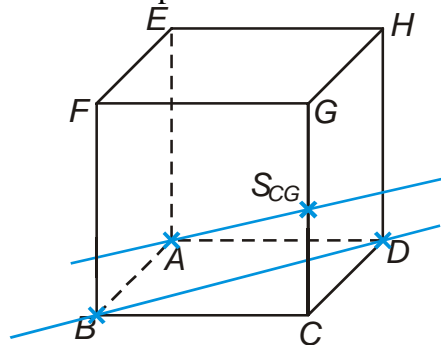
b) AS_{CG}, BD



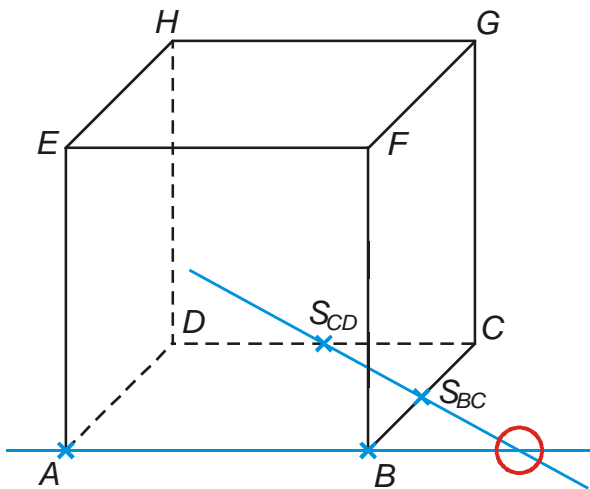
zdá se, že přímky BD a AS_{CG} jsou různoběžné, ale jejich „průsečík“ na průmětně je pouze zdánlivý:

- přímka BD leží v dolní podstavě
- přímka AS_{CG} se s dolní podstavou protíná pouze v bodě A

\Rightarrow nikdy se nemohou protnout \Rightarrow přímky BD a AS_{CG} jsou **mimoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku



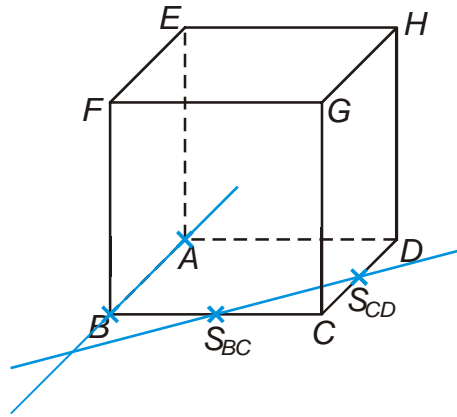
c) $AB, S_{BC}S_{CD}$



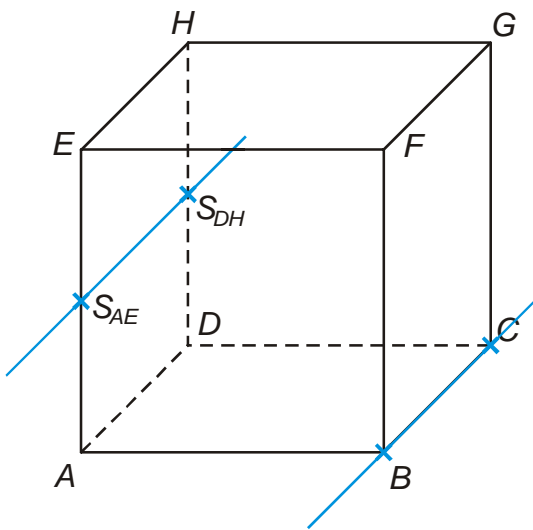
zdá se, že přímky BD a AS_{CG} jsou **různoběžné**, jejich průsečík existuje i ve skutečnosti:

- přímka AB leží v dolní podstavě
- přímka $S_{BC}S_{CD}$ leží v dolní podstavě

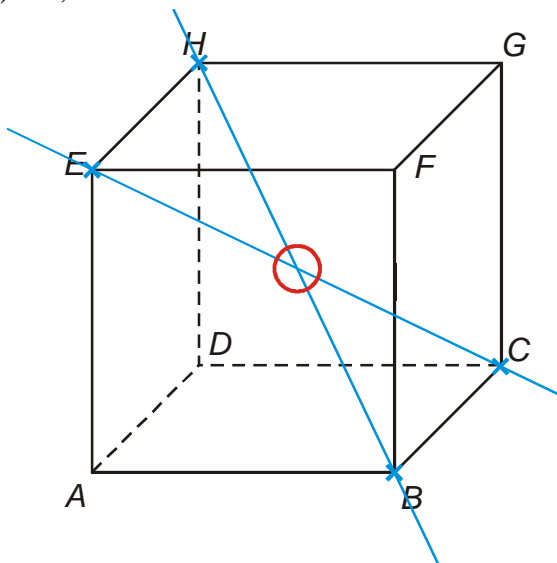
\Rightarrow musí se protnout \Rightarrow přímky AB a $S_{BC}S_{CD}$ jsou **různoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku



d) $BC, S_{AE}S_{DH}$



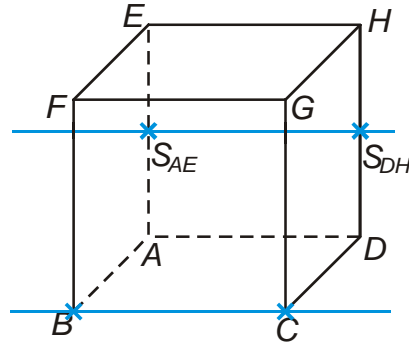
e) EC, BH



zdá se, že přímky BC a $S_{AE}S_{DH}$ jsou **rovnoběžné**:

- přímka BC je kolmá na přední stěnu
- přímka $S_{AE}S_{DH}$ je kolmá na přední stěnu

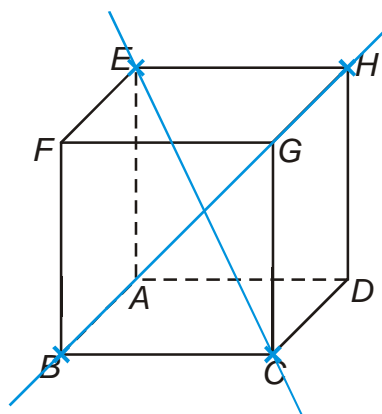
\Rightarrow mají stejný směr \Rightarrow přímky BC a $S_{AE}S_{DH}$ jsou **rovnoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku



zdá se, že přímky EC a BH jsou **různoběžné**. Jak se přesvědčíme, že průsečík opravdu existuje?

- přímka EH je kolmá k přední stěně
- přímka BC je kolmá k přední stěně

\Rightarrow přímky EH a BC jsou rovnoběžné \Rightarrow body B, C, E, H leží v jedné rovině \Rightarrow přímky EC a BH leží v jedné rovině \Rightarrow jsou **rovnoběžné**, což potvrzuje i pohled z boku



Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu studenti při samotném rozeznávání samozřejmě postupují značně rozdílnými rychlostmi. Ty rychlejší můžete brzdit tím, že po nich budete chtít nejdříve rozhodnout vzájemnou polohu, ale i podrobně zdůvodnit výsledek způsobem používaným v učebnici. U slabších studentů bude stačit, když budou schopni vzájemné polohy rozlišit.

Stejně jako v rovině i v prostoru platí:

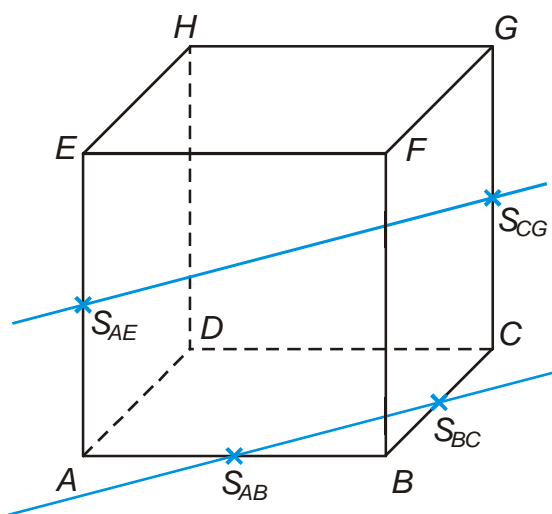
Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku.

Př. 3: Doplněte větu: „Jsou dány tři přímky p, q, r . Je-li $p \parallel q$ a $q \parallel r$, pak platí“

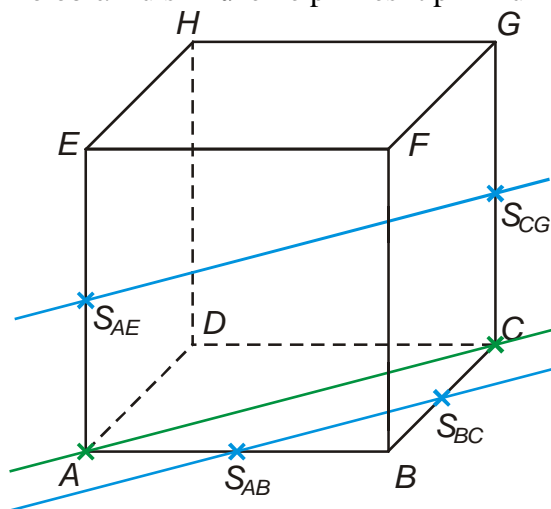
Jsou dány tři přímky p, q, r . Je-li $p \parallel q$ a $q \parallel r$, pak platí $p \parallel r$.

V matematice říkáme, že **rovnoběžnost přímek je tranzitivní (přenáší se)**.

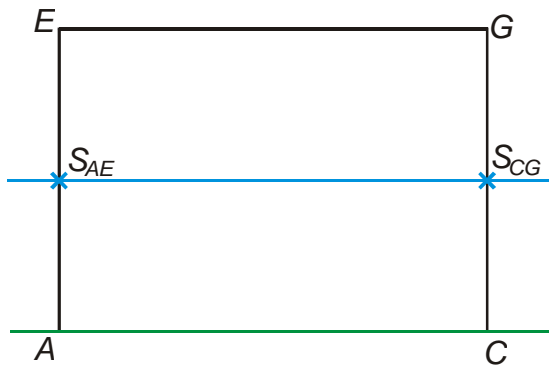
Př. 4: S využitím tranzitivnosti dokaž, že ve standardní krychli platí $S_{AE}S_{CG} \parallel S_{AB}S_{BC}$



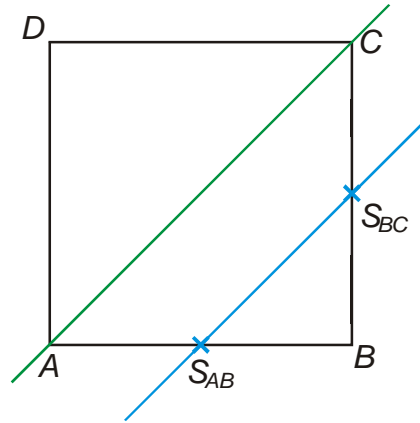
Do obrázku si můžeme přikreslit přímku AC.



Je vidět:



Přímka AC je rovnoběžná s přímkou $S_{AE}S_{CG}$ (spojuje středy protilehlých stran a dělí obdélník $ACGE$ na dvě poloviny).

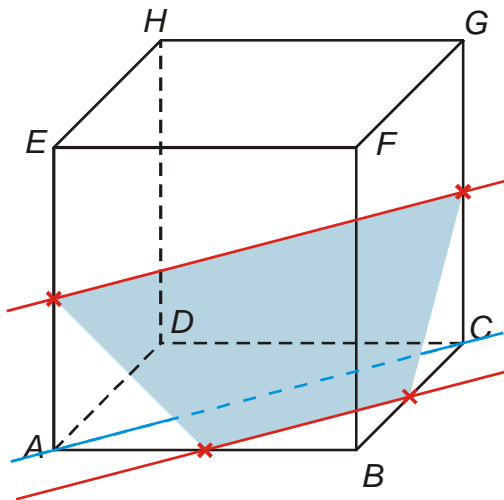


Přímka AC je rovnoběžná s přímkou $S_{AB}S_{BC}$ (spojuje středy sousedních stran ve čtverci $ABCD$ a je tedy rovnoběžná s jeho úhlopříčkou).

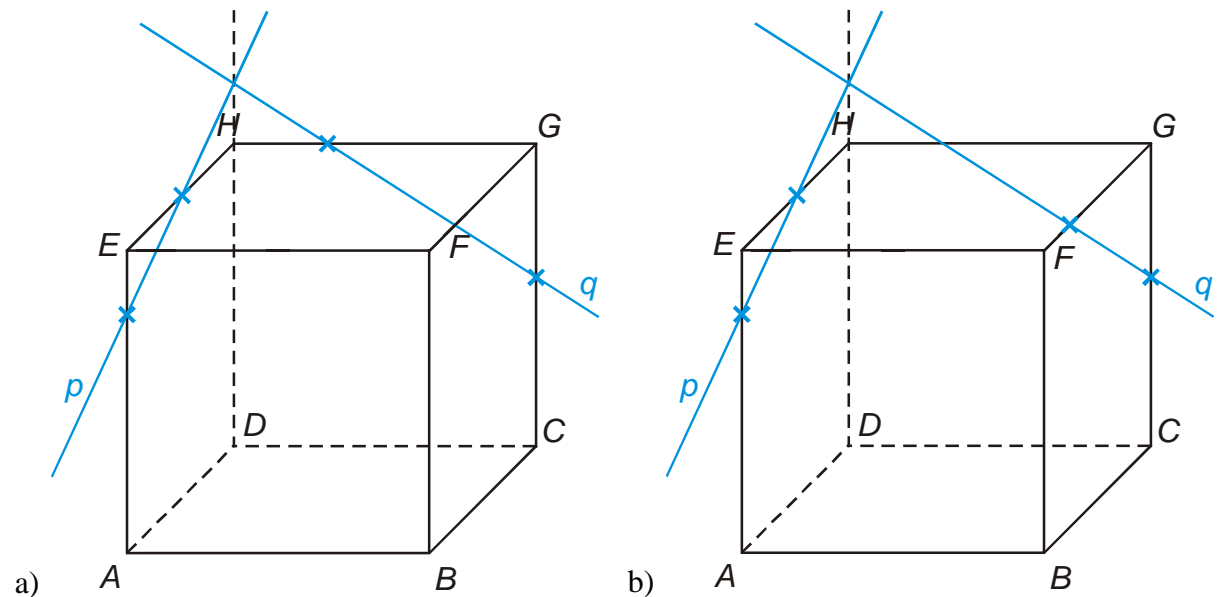
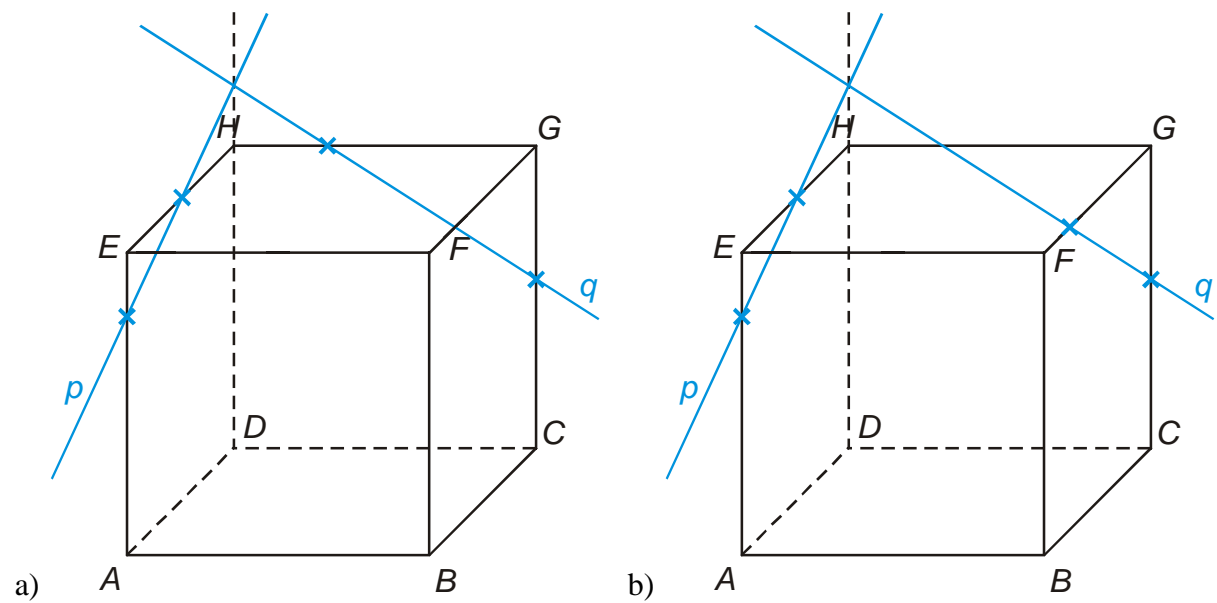
⇒ přímky $S_{AE}S_{CG}$ a $S_{AB}S_{BC}$ jsou rovnoběžné.

Poznámka: Příklad je ukázkou důležitého přístupu ve stereometrii. Příklad rozdělíme na části, které řešíme v jednotlivých rovinách. Práce v rovinách nám jednak umožňuje používat obrázky nezakreslené promítáním a jednak je daleko snazší pro utváření představ.

Dodatek: Předchozí příklad představuje také řešení příkladu 9 z minulé hodiny. Když víme, že přímky $S_{AE}S_{CG}$ a $S_{AB}S_{BC}$ jsou rovnoběžné, víme, že tyto přímky určují rovinu a body S_{AE} , S_{AB} , S_{BC} , S_{CG} v této rovině leží.



Př. 5: Urči vzájemnou polohu přímek p , q na obrázcích:



a)

- přímka p leží v levé boční stěně \Rightarrow její průsečík s přímkou DH je skutečný bod
- přímka q leží v zadní stěně \Rightarrow její průsečík s přímkou DH je skutečný bod

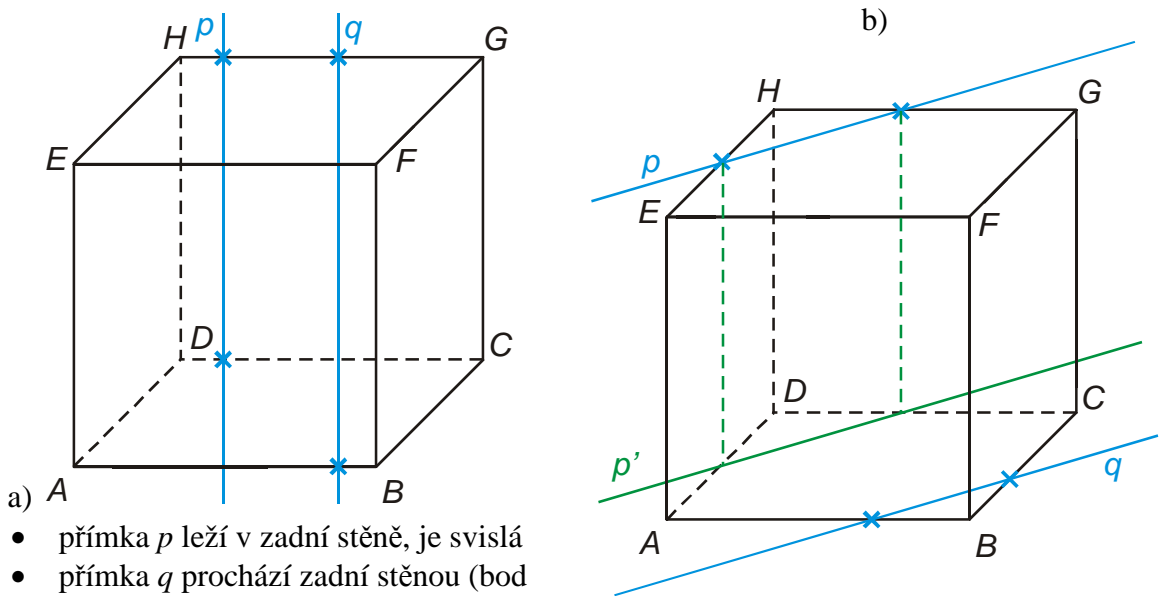
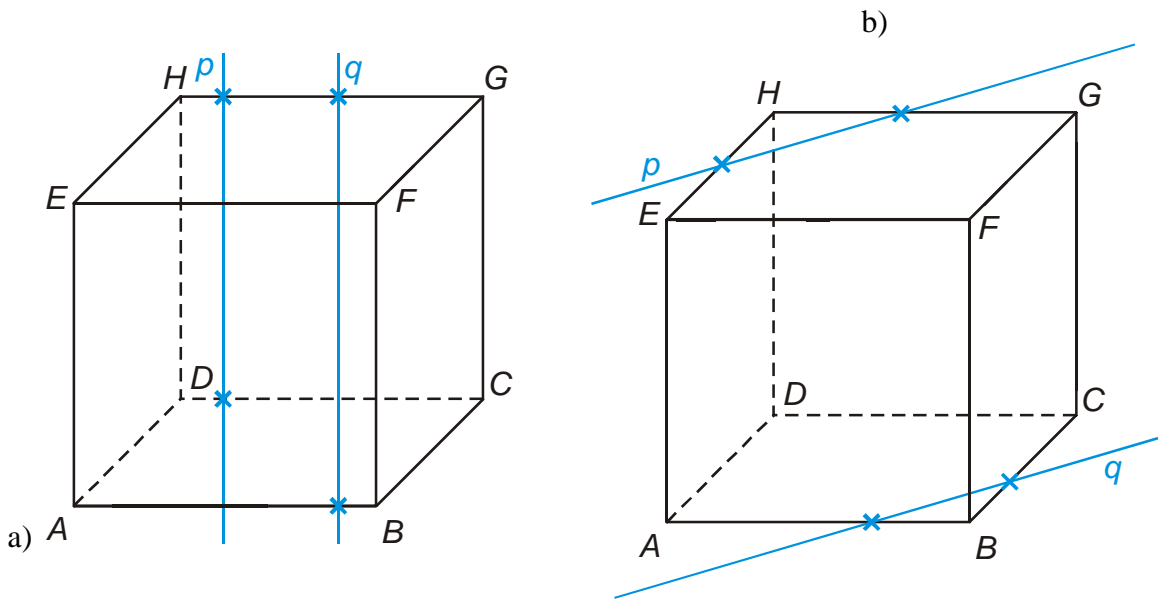
\Rightarrow obě přímky se s přímkou DH protínají ve stejném bodě, který je jejich průsečíkem \Rightarrow přímky p , q jsou **různoběžné**

b)

- přímka p leží v levé boční stěně \Rightarrow její průsečík s přímkou DH je skutečný bod
- přímka q leží v pravé boční stěně \Rightarrow nemá průsečík s přímkou DH

\Rightarrow obě přímky leží ve dvou různých navzájem rovnoběžných rovinách \Rightarrow nemohou mít průsečík \Rightarrow přímky p , q jsou **mimoběžné**

Př. 6: Urči vzájemnou polohu přímek p, q na obrázcích (průměty, které se zdají být rovnoběžné, jsou rovnoběžné):



- přímka p leží v zadní stěně, je svislá
 - přímka q prochází zadní stěnou (bod na hraně HG) i přední stěnou (bod na hraně AB) v zadní stěně \Rightarrow není svislá
- \Rightarrow přímky p, q mají různý směr, neprotínají se \Rightarrow přímky p, q jsou **mimoběžné**

k přímce p můžeme najít v rovině podstavy přímku p' , která je s ní rovnoběžná a je rovnoběžná s přímkou $q \Rightarrow$ přímky p, q jsou **rovnoběžné**

Př. 7: Petáková:
strana 90/cvičení 1 a) b) c) d)
strana 90/cvičení 5 a)

Shrnutí: Ve stereometrii není všechno tak, jak se na první pohled z obrázku zdá.