

5.2.3 Kolmost přímek a rovin I

Předpoklady: 5202

Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je 90° .

⇒

- Navzájem kolmé mohou být i mimoběžky.
- Dvě úsečky jsou kolmé, právě když leží na kolmých přímkách.

Píšeme:

- přímky: $p \perp q, \Leftrightarrow AB \perp \Leftrightarrow CD$,
- úsečky: $AB \perp CD$.

Př. 1: Doplň vztahy mezi přímkami p, q, r v prostoru.

- a) Je-li $p \perp q$ a $q \parallel r$, pak ... b) Je-li $p \parallel q$ a $q \perp r$, pak ...

a) Je-li $p \perp q$ a $q \parallel r$, pak $p \perp r$.

b) Je-li $p \parallel q$ a $q \perp r$, pak $p \perp r$.

Př. 2: Rozhodni, zda pro přímky p, q, r v prostoru platí věty:

- a) Je-li $p \parallel r$ a $q \perp r$, pak $p \perp q$. b) Je-li $p \perp q$ a $q \perp r$, pak $p \parallel r$.

Pokud věta neplatí, najdi protipříklad na přímkách určených vrcholy standardní krychle.

a) Je-li $p \parallel r$ a $q \perp r$, pak $p \perp q$.

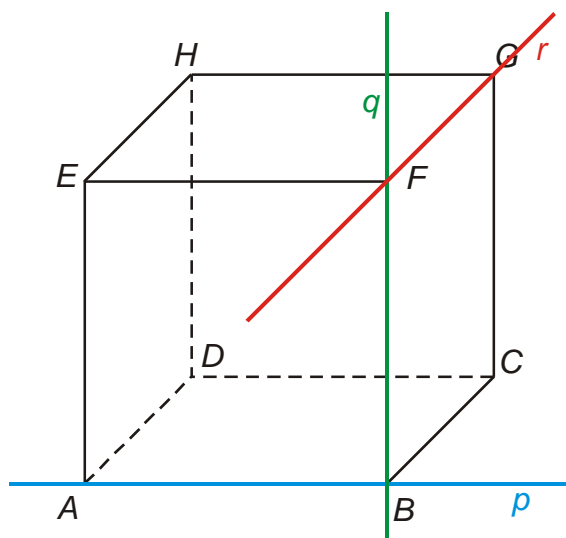
Věta platí, jde o stejné tvrzení jako v bodě 1 a), pouze s prohozeným významem přímek r a q .

b) Je-li $p \perp q$ a $q \perp r$, pak $p \parallel r$.

Věta obecně neplatí, například ve standardní krychli pro přímky:

- $p \Leftrightarrow AB$
- $q \Leftrightarrow BF$
- $r \Leftrightarrow FG$

Odchylka mezi přímkou p a r může být libovolná. Například pokud bychom místo přímky FG zvolili za přímku r přímku EF , byly by přímky p a r rovnoběžné.

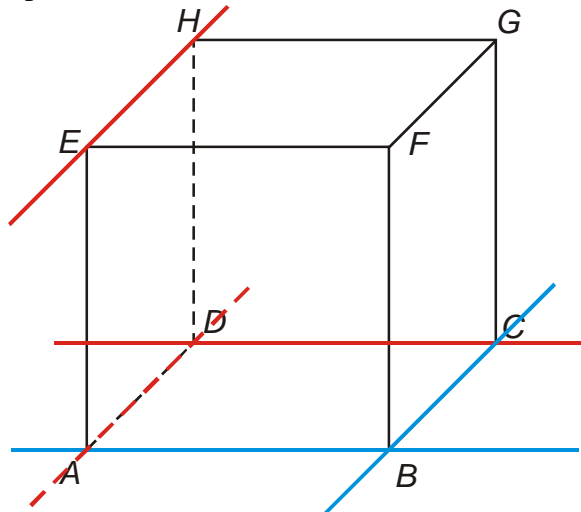


Př. 3: Rozhodni, které z dvojic přímek určených vrcholy standardní krychle jsou navzájem kolmé. Příklad řeš nejdříve bez obrázku, jen „v hlavě“.

- a) AB, BC b) CD, EH c) AB, EG d) AD, CH

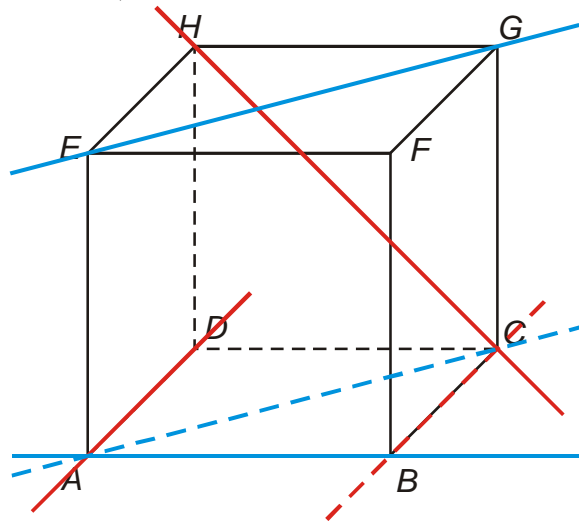
a) Přímky AB, BC jsou kolmé (leží na nich strany čtverce).

b) Přímky CD, EH jsou kolmé (přímka AB je kolmá na přímku AD , která je rovnoběžná s přímku EH).



c) Přímky AB, EG nejsou kolmé (AB není kolmá s přímku AC , která je rovnoběžná s přímku EG).

d) Přímky AD, CH jsou kolmé (HC je kolmá na přímku BC , čtyřúhelník $BCHE$ je obdélník).



Kdy je přímka kolmá k rovině?

Přímka je kolmá k rovině, právě když je kolmá ke všem přímek rovině.

Píšeme:

- $p \perp \rho$ = přímka p , je kolmá k rovině ρ = přímka p je kolmice k rovině ρ .
- $p \cap \rho = \{P\}$ = pata kolmice

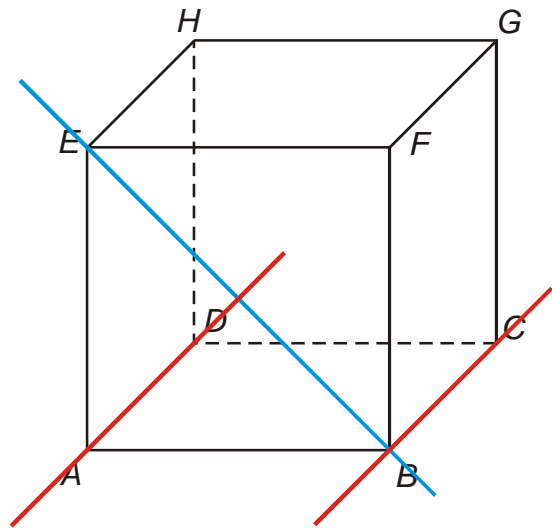
Jak se přesvědčíme, že je rovina kolmá k přímce (zkoušet všechny přímky nemůžeme, je jich nekonečně mnoho)?

\Rightarrow **kritérium kolmosti přímky a rovny:**

Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá.

Př. 4: U standardní krychle $ABCDEFGH$ najdi příklad toho, že přímka nemusí být kolmá k rovině, když je kolmá ke dvěma rovnoběžným přímkám v rovině.

Možností je hodně, například přímka EB je kolmá k přímkám AD i BC , ale k rovině ABC kolmá není.



Proč nestačí kolmost na dvě rovnoběžky?

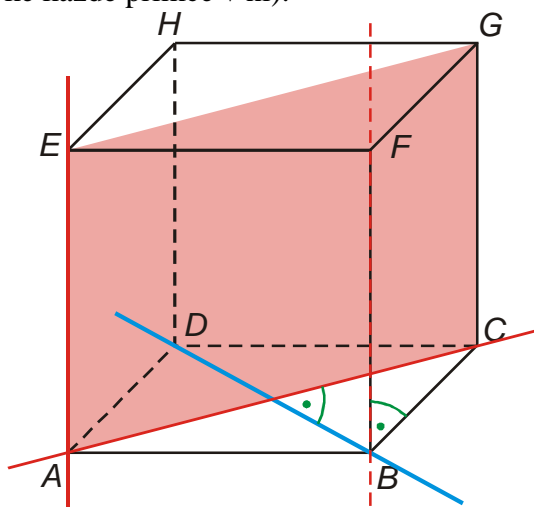
Přímka „obsahuje“ jeden směr, rovina dva směry \Rightarrow dvě rovnoběžky určují pouze jeden směr a nezaručují tedy, že přímka, která je k na ně kolmá, je kolmá na celou rovinu. Dvě různoběžky určují dva různé směry a tedy všechny směry roviny.

Př. 5: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Dokaž, že přímka BD je kolmá k rovině ACE .

Pokud má být přímka BD kolmá k rovině ACE , musí být kolmá ke dvěma různoběžkám, které v ní leží \Rightarrow hledáme dvě takové přímky:

- BD je kolmá k přímce AC (úhlopříčky v podstavě)
- BD je kolmá k přímce BF (strany obdélníka $BFHD$), BF je rovnoběžná s AE \Rightarrow BD je kolmá k AE

\Rightarrow BD je kolmá ke dvěma různoběžkám v rovině ACE \Rightarrow je kolmá k celé rovině ACE (a tím i ke každé přímce v ní).



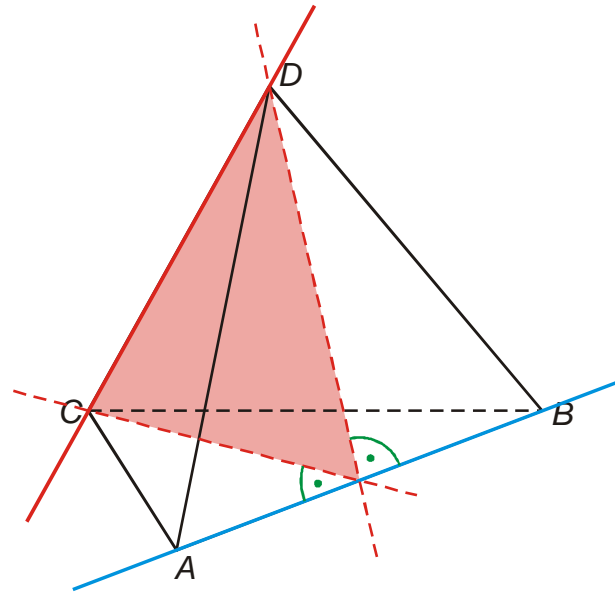
Př. 6: Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Dokaž, že platí $AB \perp CD$.

Nejde nalézt přímý důkaz kolmosti \Rightarrow zkusíme najít rovinu, která obsahuje přímku CD a je kolmá na AB .

Adept: rovina CDS_{AB} . Dokazujeme, že $CDS_{AB} \perp AB$:

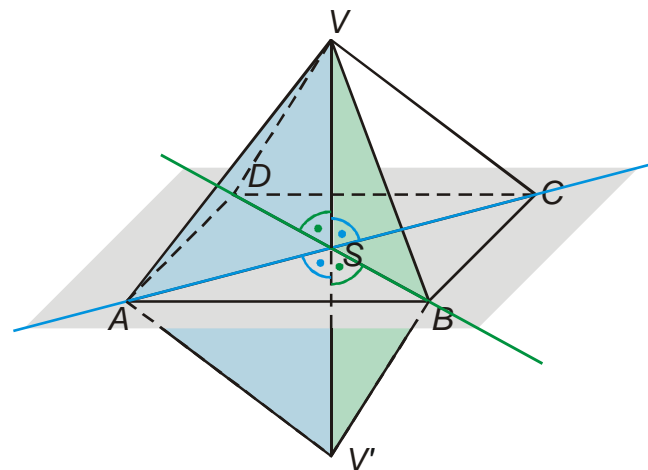
- přímka AB je kolmá na úsečku CS_{AB} (CS_{AB} je výška v rovnostranném trojúhelníku ABC),
- přímka AB je kolmá na úsečku DS_{AB} (DS_{AB} je výška v rovnostranném trojúhelníku ABD),

\Rightarrow přímka AB je kolmá na rovinu CDS_{AB} (je kolmá na dvě různoběžné přímky v této rovině CS_{AB} a DS_{AB}) \Rightarrow je tedy kolmá na všechny přímky v této rovině i na přímku DC .

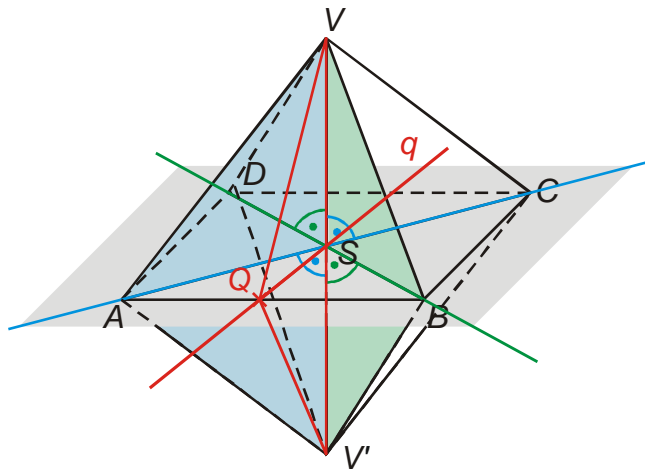


Se zájemci se vrátíme ke kritériu kolmosti přímky a roviny.

Př. 7: (BONUS) V klasické učebnici je kritérium kolmosti přímky a roviny dokazováno způsobem uvedeným níže. Zobecní důkaz pro přímku p kolmou k přímkám a, b v rovině ρ . Přímky a, b nejsou navzájem kolmé a neprocházejí patou kolmice přímky p .



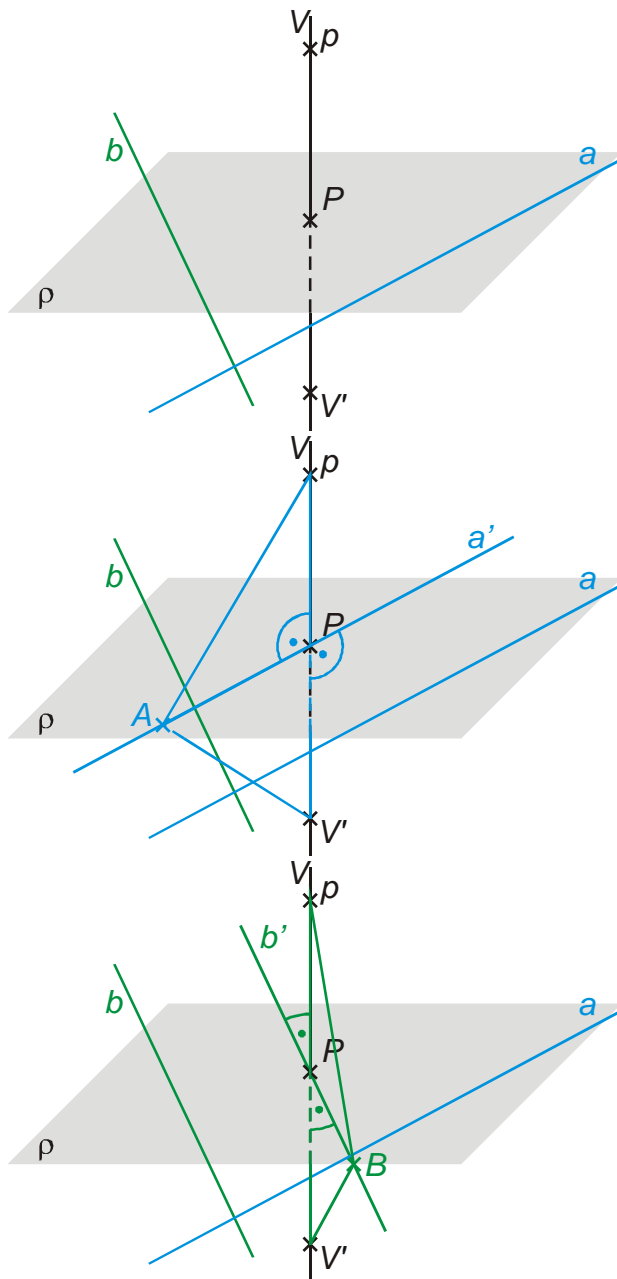
Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Předpokládáme, že přímky VS je kolmá k přímkám AC a BD roviny ABC (vybarvená šedě). Na přímce VS sestrojíme bod V' tak, aby platilo $|VS| = |V'S'|$ (vznikne tak jehlan $ABCDV'$ shodný s jehlanem $ABCDV$). Trojúhelník ASV (modrý) je shodný s trojúhelníkem ASV' (věta *sss*). Trojúhelník BSV (zelený) je shodný s trojúhelníkem BSV' (věta *sss*).



Nakreslíme si libovolnou přímku q ležící v rovině ABC . Její průsečík s přímkou AB označíme Q . Dokazujeme, že trojúhelníky QSV a QSV' jsou shodné. Víme:

$$|VS| = |VS'| \Rightarrow \text{potřebujeme } |QV| = |QV'|.$$

Trojúhelníky QAV a QAV' jsou shodné (věta *sus*) \Rightarrow platí $|QV| = |QV'| \Rightarrow QSV$ a QSV' jsou shodné (věta *sss*) \Rightarrow úhly QSV a QSV' jsou shodné, dohromady se rovnají přímému úhlu \Rightarrow jsou kolmé \Rightarrow přímka VS je kolmá na přímku q .



Krok 1:

Přímka p je kolmá k přímkám a, b v rovině ρ . Přímký a, b nejsou navzájem kolmé a neprocházejí patou kolmice přímky p .

Vyznačíme průsečík P přímky p s rovinou ρ .

Na přímce p zvolíme bod V .

Na přímce p zvolíme bod V' tak, aby platilo $|VP| = |V'P|$.

Krok 2:

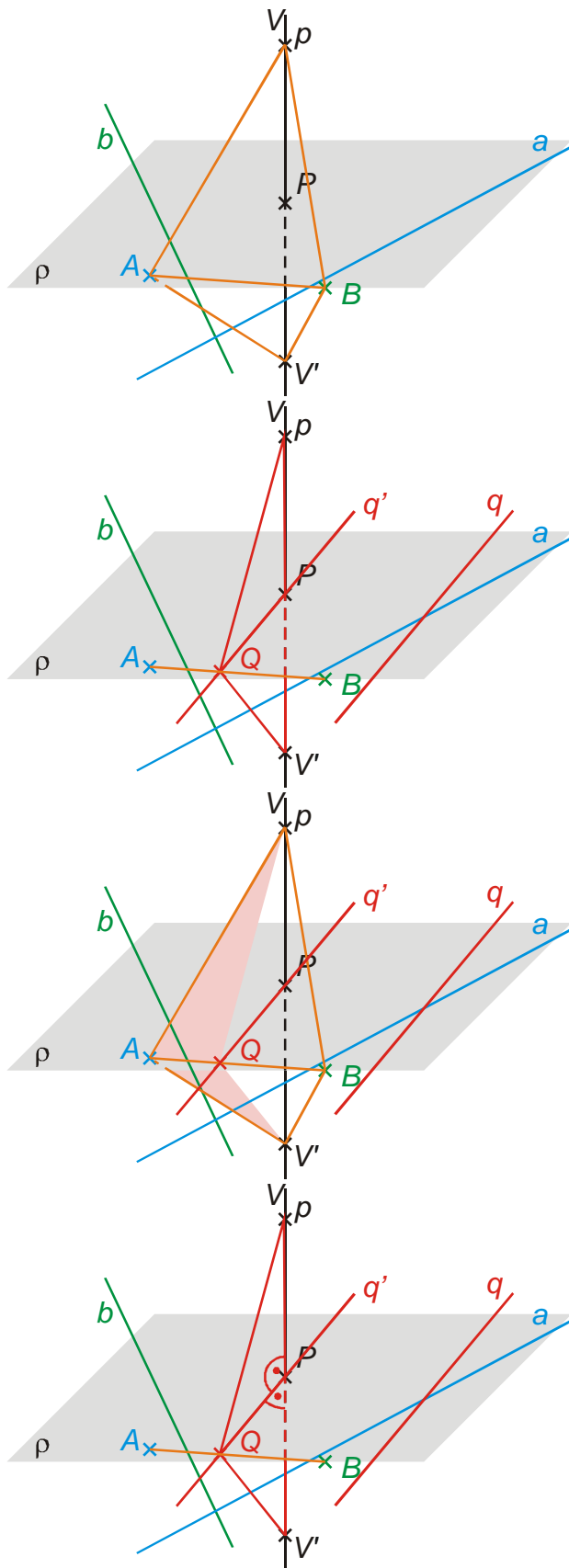
Bodem P vedeme rovnoběžku a' s přímkou a , na které zvolíme libovolný bod A různý od P .

Trojúhelníky APV a APV' shodné podle věty *sus* (společná strana AP , úhly APV a APV' , strany PV a PV').

Krok 3:

Bodem P vedeme rovnoběžku b' s přímkou b , na které zvolíme libovolný bod B různý od P .

Trojúhelníky BPV a BPV' shodné podle věty *sus* (společná strana BP , úhly BPV a BPV' , strany PV a PV').



Krok 4:

V předchozích krocích jsme dokázali, že trojúhelníky ABV a ABV' jsou shodné podle věty *sss* (společná strana AB , shodná dvojice stran AV , AV' a shodná dvojice stran BV , BV').

Krok 5:

V libovolnou přímkou q roviny ABC (u které chceme dokázat její kolmost k přímce p) sestrojíme rovnoběžku bodem P . Její průsečík s úsečkou AB označíme Q . Potřebujeme dokázat shodnost trojúhelníků QPV a QPV' . Víme, že se shodují dvě dvojice stran: společná strana QP a strany PV a PV' \Rightarrow dokážeme shodnost stran QV a QV' .

Krok 6:

Trojúhelníky AQV a AQV' jsou shodné podle věty *sus*: společná strana AQ , shodné úhly QAV a QAV' (ve shodných trojúhelnících viz. krok 4), shodné strany AV , AV' \Rightarrow strana QV je shodná se stranou QV' .

Krok 7:

Trojúhelníky QPV a QPV' jsou shodné podle věty *sss* \Rightarrow úhly QPV a QPV' jsou shodné, jejich součet je úhel pravý \Rightarrow oba jsou kolmé \Rightarrow přímka q' je kolmá k přímce $p \Rightarrow$ přímka q je kolmá k přímce p .

⋮ Pokud by byla přímka q' rovnoběžná s přímkou AB stačí zvolit jeden z bodů A , B jinak.
 ⋮ Postup důkazu se nemění.

Shrnutí:

