6.1.1 Zavedení komplexních čísel

Předpoklady: 2506

Vzpomínka z dávných časů: některé kvadratické rovnice nemají řešení v množině reálných čísel (neexistuje reálné číslo, pro které rovnice vyjde).

Například: $x^2+1=0$.
Proč nejde vyřešit?
Neexistuje reálné číslo, které by po umocnění na druhou bylo záporné, tedy ani rovno –1.
$2^2=4$, $(-1)^2=1$, $0^2=0$. Asi se s tím nedá nic dělat.

Ale to není matematický přístup. **Když číslo nemáme, prostě si ho vymyslíme.**

Předpokládáme, že existuje číslo (označíme ho *i*), pro které platí: $i^2=-1$.

Zkusíme dosadit do rovnice $x^2+1=0$ nově vymyšlené číslo $x=i$:
$x^2+1=i^2+1=-1+1=0$. Vyšlo to, máme řešení.

To je sice hezké, ale co si pod *i* představit?
To je trochu problém. Není moc možností. Jediné, co můžeme říct, že *i* je číslo, které samo o sobě moc neznamená, **nemá předobraz v realitě a nezavádíme ho proto, abychom dokázali zachytit něco existujícího okolo nás. Číslo *i* jsme si vymysleli, abychom mohli řešit rovnici $x^2+1=0$ a jeho základní vlastností je rovnost $i^2=-1$. Další význam čísla *i* nemáme, rovnost $i^2=-1$ nám musí stačit.**

Pedagogická poznámka: Studenti často mají pocit, že by číslo *i* mělo něco znamenat („Ukaž mi ho."). Nemá cenu diskuse příliš prodlužovat. Lepší je na rovinu říct, že neznamená nic konkrétního a jediné, o co se mohou opírat, je rovnost $i^2=-1$.

Př. 1: Existuje ještě další řešení rovnice $x^2+1=0$, kromě řešení $x=i$? Pokud ano, ověř odhad dosazením do rovnice.

Za předpokladu, že se s *i* dá počítat stejně jako s reálným číslem, platí i $x=-i$.
$x^2+1=(-i)^2+1=(-1)^2(i)^2+1=1\cdot(-1)+1=0$

Zavádět nové číslo kvůli jediné rovnici by bylo trochu zbytečné. Zkusíme, zda by pomocí *i* šlo vyřešit i jiné rovnice.

Př. 2: Využij číslo *i* pro nalezení kořenů rovnice $x^2+4=0$. Proveď zkoušku.

Hledáme číslo, pro které platí: $x^2=-4$.
Nápad: $x=2i$ (2 zajistí po umocnění 4, *i* zajistí mínus).
Zkouška: $x^2+4=(2i)^2+4=2^2i^2+4=4(-1)+4=0$
Zřejmě také $x=-2i$

Zkouška: $x^2+4=(-2i)^2+4=(-2)^2 i^2+4=4(-1)+4=0$

$\Rightarrow$ Dokážeme vyřešit všechny rovnice typu $x^2+a=0$, kde $a>0$.
$\Rightarrow$ Zkusíme něco těžšího, třeba rovnici $x^2-2x+10=0$.

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^2-2x+10=0$.

Použijeme starý dobrý vzorec:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{4-40}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$\Rightarrow$ záporný diskriminant $\Rightarrow$ rovnice nemá v R řešení $\Rightarrow$ zkusíme řešit použitím čísla i.
Rovnici $x^2-2x+10=0$ zkusíme převést na rovnici $y^2+a=0$ (to už umíme).

$$x^2-2x+10=x^2-2x+1+9=(x-1)^2+9=0$$

Substituce: $y=x-1 \Rightarrow (x-1)^2+9=y^2+9=0$

Zřejmě platí: $y_1=3i$, $y_2=-3i$.

Návrat k původní proměnné:

- $y_1=x_1-1=3i \Rightarrow x_1=1+3i$
- $y_2=x_2-1=-3i \Rightarrow x_2=1-3i$

Pedagogická poznámka: Na nápad se substitucí většina studentů samozřejmě nepřijde, je třeba jim poměrně brzo poradit.

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou spíše než k obhajování komplexních čísel určeny k tomu, aby s nimi studenti začali počítat i přesto, že korektní zavedení operací s komplexními čísli přijde až příští hodinu.

Př. 4: Ověř dosazením, že výrazy $1+3i$ a $1-3i$ jsou řešením rovnice $x^2-2x+10=0$.

$x_1=1+3i$

$$x^2-2x+10=(1+3i)(1+3i)-2(1+3i)+10=(1+3i+3i+9i^2)-2-6i+10=$$

$$=1+9(-1)-2+10=0$$

$x_2=1-3i$

$$x^2-2x+10=(1-3i)(1-3i)-2(1-3i)+10=(1-3i-3i+9i^2)-2+6i+10=$$

$$=1+9(-1)-2+10=0$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $x^2+4x+5=0$ podobným způsobem jako předchozí příklad. Proveď zkoušku.

$x^2+4x+5=0$, zkusíme převést na rovnici $y^2+a=0$ (to už umíme).

$$x^2+4x+5=x^2+2\cdot2x+2^2-2^2+5=(x+2)^2+1=0$$

Substituce: $y=x+2 \Rightarrow (x+2)^2+1=y^2+1=0$

Zřejmě platí: $y_1 = i$, $y_2 = -i$.

Návrat k původní proměnné:

- $y_1 = x_1 + 2 = i \Rightarrow x_1 = -2 + i$
- $y_2 = x_2 + 2 = -i \Rightarrow x_2 = -2 - i$

Zkouška:

$x_1 = -2 + i$

$x^2 + 4x + 5 = (-2+i)(-2+i) + 4(-2+i) + 5 = \left(4 - 2i - 2i + i^2\right) - 8 + 4i + 5 =$

$= 4 + (-1) - 8 + 5 = 0$

$x_2 = -2 - i$

$x^2 + 4x + 5 = (-2-i)(-2-i) + 4(-2-i) + 5 = \left(4 + 2i + 2i + (-i)^2\right) - 8 - 4i + 5 =$

$= 4 + (-1) - 8 + 5 = 0$

Př. 6: (BONUS) Vyřeš pomocí předcházejícího postupu rovnici $9x^2 - 6x + 5 = 0$.

$9x^2 - 6x + 5 = 0$, zkusíme převést na rovnici $y^2 + a = 0$ (to už umíme).

$9x^2 - 6x + 5 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 + 4 = (3x-1)^2 + 4 = 0$

Substituce: $y = 3x - 1 \Rightarrow (3x-1)^2 + 4 = y^2 + 4 = 0$

Zřejmě platí: $y_1 = 2i$, $y_2 = -2i$.

Návrat k původní proměnné:

- $y_1 = 3x_1 - 1 = 2i \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$
- $y_2 = 3x_2 - 1 = -2i \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$

Př. 7: Ověř dosazením, že výrazy $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ a $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$ můžeme považovat za řešení rovnice $9x^2 - 6x + 5 = 0$.

$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

$9x^2 - 6x + 5 = 9\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right) - 6\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right) + 5 = 9\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}\frac{2}{3}i + \frac{4}{9}i^2\right) - 2 - 4i + 5 =$

$= 1 + 4i - 4 - 2 - 4i + 5 = 0$

$x_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$

$9x^2 - 6x + 5 = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right) - 6\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right) + 5 = 9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}\frac{2}{3}i + \frac{4}{9}i^2\right) - 2 + 4i + 5 =$

$= 1 - 4i - 4 - 2 + 4i + 5 = 0$

$\Rightarrow$ Zdá se, že s pomocí čísla i ($i^2 = -1$) vyřešíme všechny dosud neřešitelné kvadratické rovnice.

Naše výsledky: $\pm i$, $\pm 2i$, $1 \pm 3i$, $-2 \pm i$, $\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3} i$ nazveme **komplexní čísla.**

Komplexním číslem nazýváme výraz ve tvaru $a + bi$, kde *a, b* jsou reálná čísla a *i* je číslo, pro něž platí $i^2 = -1$.

V komplexním čísle $a + bi$ se nazývá:
- **číslo *a* reálná část**
- **číslo *b* imaginární část**
- **číslo *i* imaginární jednotka.**

Množinu komplexních čísel značíme *C* ($\mathbb{C}$), komplexní číslo většinou z.

Zápis komplexního čísla *z* ve tvaru $a + bi$ nazýváme **algebraický tvar komplexního čísla.**

Shrnutí: Když si vymyslíme číslo *i* takové, že platí $i^2 = -1$, dokážeme vyřešit dosud neřešitelné kvadratické rovnice.