6.1.5 Absolutní hodnota komplexního čísla

Předpoklady: 6104

Absolutní hodnota reálného čísla: $|x| = \sqrt{x^2} \geq 0$

- vždy nezáporné číslo
- vzdálenost na číselné ose od počátku

Jak zavést absolutní hodnotu v komplexních číslech?
Udělat nezáporné číslo z komplexního čísla už umíme: $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$.
Je to ono?

Zkusíme na $z = a + 0i$:

- Vyrobíme ji komplexně: $z \cdot \overline{z} = (a+0i)(a-0i) = a^2$
- Vyrobíme ji reálně: $\sqrt{a^2}$

$\Rightarrow$ abychom dostali stejný výsledek, musíme výraz $z \cdot \overline{z}$ odmocnit (půjde to bez problémů, protože jde o reálné číslo) $\Rightarrow$

Absolutní hodnota komplexního čísla z je číslo $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$|-2+i|$: reálná část $a = -2$, imaginární část $b = 1 \Rightarrow |-2+i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Př. 1: Urči absolutní hodnotu z komplexních čísel:
a) $2+3i$ b) $2-3i$ c) $-1-i2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{7} - i\sqrt{6}$

a) $|2+3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|2-3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

c) $|-1-i2\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$

d) $|\sqrt{7} - i\sqrt{6}| = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{13}$

$\Rightarrow$ Několik naprosto odlišných komplexních čísel má stejnou absolutní hodnotou $\Rightarrow$ komplexních čísel s absolutní hodnotou $\sqrt{13}$ je zřejmě nekonečně mnoho $\Rightarrow$ komplexní čísla asi nepůjde uspořádat podle velikosti.

Pedagogická poznámka: Existuje poměrně značné množství studentů, kteří berou imaginární jednotku jako součást imaginární části komplexního čísla,do vzorce dosazují takto $|2+3i| = \sqrt{2^2 + (3i)^2} = \sqrt{4 + 9i^2} = \sqrt{4-9} = \sqrt{-5}$ a pak křičí: „Kde chyba?“
Nezbývá než opakovat, že imaginární část je pouze to, co je před *i*. Tento příklad jak každopádně dobré místo na jejich odchycení.

Př. 2: Najdi alespoň tři další komplexní čísla z taková, aby platilo $|z| = \sqrt{13}$.

Hledáme taková čísla, aby součet jejich druhých mocnin byl roven 13.

$\Rightarrow\ 13 = 8 + 5$

$z = 2\sqrt{2} - i\sqrt{5}$ (a další možnosti při změně znamének nebo pořadí)

$\Rightarrow 13 = 2 + 11$

$z = \sqrt{2} - i\sqrt{11}$ (a další možnosti při změně znamének nebo pořadí)

$\Rightarrow 13 = 10 + 3$

$z = \sqrt{10} + i\sqrt{3}$ (a další možnosti při změně znamének nebo pořadí)

Př. 3: Vypočti:

a) $\left|\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)\right|$ b) $\left|\frac{2+2i}{1-i}\right|$

a)

$$\left|\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}i\right)\right| = \left|\sqrt{6} + 2i - i\sqrt{3} - i^2\sqrt{2}\right| = \left|\sqrt{6} + \sqrt{2} + \left(2 - \sqrt{3}\right)i\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6 + 2\sqrt{12} + 2 + 4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{15 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}} = \sqrt{15}$$

b)

$$\left|\frac{2+2i}{1-i}\right| = \left|\frac{2+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right| = \left|\frac{2+2i+2i+2i^2}{1+1}\right| = \left|\frac{4i}{2}\right| = |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Předchozí výpočty mohou značně zjednodušit vzorce pro výpočet absolutní hodnoty.

- **Pro libovolná komplexní čísla** z_1, z_2 **platí:** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- **Pro libovolná komplexní čísla** z_1, $z_2 \neq 0$ **platí:** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Př. 4: Vypočti s využitím vzorců pro výpočet absolutní hodnoty:

a) $\left|\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}i\right)\right|$ b) $\left|\frac{2+2i}{1-i}\right|$ c) $\left|\frac{2i + |1+2i|}{|1+i|i+2}\right|$

a)

$$\left|\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}i\right)\right| = \left|\sqrt{2} - i\right|\left|\sqrt{3} + \sqrt{2}i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

b)

$$\left|\frac{2+2i}{1-i}\right| = \frac{|2+2i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$$

c)

$$\left|\frac{2i+|1+2i|}{|1+i|i+2}\right| = \left|\frac{2i+\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+1^2}i+2}\right| = \left|\frac{\sqrt{5}+2i}{2+i\sqrt{2}}\right| = \frac{\left|\sqrt{5}+2i\right|}{\left|2+i\sqrt{2}\right|} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2}}{\sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Př. 5: Petáková:
strana 136/cvičení 22 c) d)
strana 136/cvičení 23 c) e) f)
strana 136/cvičení 24 a)

Př. 6: (BONUS) Dokaž pravidla pro výpočet absolutní hodnoty.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)\overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}}\sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{z_1}{z_2} \cdot \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}} = \sqrt{\frac{z_1 \overline{z_1}}{z_2 \overline{z_2}}} = \frac{\sqrt{z_1 \overline{z_1}}}{\sqrt{z_2 \overline{z_2}}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Př. 7: Vypočti:

a) $|i|$ b) $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$ c) $\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right|$ d) $\left|\frac{1+2i}{2+i}\right|$

a) $|i| = \sqrt{1^2} = 1$

b) $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = 1$

c) $\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

d) $\left|\frac{1+2i}{2+i}\right| = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

Absolutní hodnota všech čísel se rovnala 1 $\Rightarrow$ říkáme jim komplexní jednotky.
Komplexní jednotka je takové komplexní číslo, jehož absolutní hodnota se rovna jedné.

Př. 8: Petáková:
strana 136/cvičení 26 c) f)
strana 136/cvičení 28
strana 136/cvičení 29 a)

Př. 9: Urči, pro která reálná čísla a je komplexní číslo $\frac{-2-a+ia}{1+ia}$ číslo:

a) reálné b) imaginární c) ryze imaginární

Musíme upravit zlomek do algebraického tvaru:

$$\frac{-2-a+ia}{1+ia}=\frac{-2-a+ia}{1+ia}\cdot\frac{1-ia}{1-ia}=\frac{-2-a+ia+2ia+ia^2-i^2a^2}{1-i^2a^2}=\frac{-2-a+a^2+3ia^2-ia}{1+a^2}=$$

$$=\frac{-2-a+a^2}{1+a^2}+\frac{a^2+3a}{1+a^2}i$$

a) reálné číslo $\Rightarrow$ imaginární část se rovná nule $\Rightarrow$ $a^2+3a=a(a+3)=0$

$a_1=0$, $a_2=-3$

b) imaginární číslo $\Rightarrow$ imaginární část není nulová $\Rightarrow$ $a\in R-\{-3;0\}$

c) ryze imaginární číslo $\Rightarrow$ reálná část je nulová $\Rightarrow$ $a^2-a-2=(a-2)(a+1)=0$

$a_3=-1$, $a_4=2$

Př. 10: Petáková:
strana 134/cvičení 7
strana 134/cvičení 9

Shrnutí: