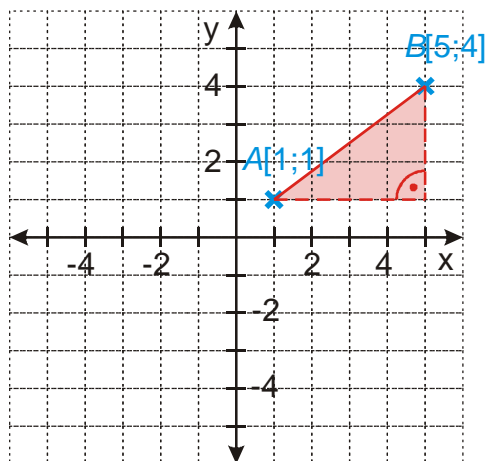


7.1.3 Vzdálenost bodů

Předpoklady: 7102

Př. 1: Urči vzdálenost bodů $A[1;1]$ a $B[5;4]$.



Z obrázku je vidět, že vzdálenost $|AB|$ se rovná délce přepony v pravoúhlém trojúhelníku:

$$|AB| = c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Jak postupovat obecně bez obrázku, když známe souřadnice bodů $A[a_1; a_2]$ a $B[b_1; b_2]$?

Musíme určit délky odvěsen:

- $4 = 5 - 1 = b_1 - a_1$
- $3 = 4 - 1 = b_2 - a_2$

$$\Rightarrow \text{vzorec: } |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Př. 2: Najdi situace, ve kterých by se při prvním pohledu mohlo zdát, že vzorec

$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ pro výpočet vzdáleností neplatí, nebo nebude použitelný. Ověř v takových případech jeho platnost.

a) rozdíl $b_1 - a_1$ nemusí být vždy kladný

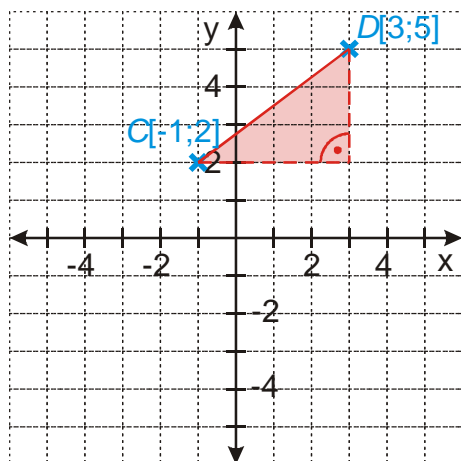
například pokud bychom prohodili body z příkladu 1

$$B[1;1], A[5;4]: |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

\Rightarrow při umocňování na druhou případné záporné znaménko zmizí \Rightarrow nezáleží na tom, v jakém pořadí body do vzorce dosadíme

b) jak funguje výpočet rozdílu $b_1 - a_1$ v případě, že je jedna ze souřadnic záporná?

zkusíme body $C[-1;2]$, $D[3;5]$



Zkusíme obě možnosti výpočtu:

- $(b_1 - a_1) = [3 - (-1)]^2 = 4^2 = 16$
- $(a_1 - b_1) = [(-1) - 3]^2 = (-4)^2 = 16$

V obou případech jsme získali stejný správný výsledek.

Je to jasné, protože platí $(b_1 - a_1)^2 = |b_1 - a_1|^2$ a $|b_1 - a_1|$ je vzdálenost obrazů čísel na číselné ose

Vzdálenost bodů $A[a_1; a_2]$ a $B[b_1; b_2]$ v rovině udává vzorec

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Př. 3: Urči vzdálenost bodů

a) $A[1; 2]$ a $B[6; 14]$

b) $C[5; -1]$ a $D[1; 2]$

c) $E[-2; -5]$ a $F[-4; 5]$

a) $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (14-2)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

b) $|CD| = \sqrt{(d_1 - c_1)^2 + (d_2 - c_2)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (2-[-1])^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

c) $|EF| = \sqrt{(f_1 - e_1)^2 + (f_2 - e_2)^2} = \sqrt{[-4 - (-2)]^2 + [5 - (-5)]^2} = \sqrt{(-2)^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

Dodatek: Na pořadí, ve kterém body do vzorečku dosadíme samozřejmě nezáleží:

$$|BA| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (2-14)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$$

Př. 4: Urči zbývající souřadnici bodu B tak, aby platilo: $|AB| = 2\sqrt{5}$, $A[-2; 3]$, $B[x; 1]$.

Napišeme rovnici pro vzdálenost bodů A , a B a dosadíme souřadnice ze zadání.

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{[x - (-2)]^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{[x + 2]^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

získali jsme rovnici \Rightarrow mechanická záležitost

$$\sqrt{[x + 2]^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \quad /^2$$

$$(x + 2)^2 + 4 = 20$$

$$x^2 + 4x + 4 + 4 = 20$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = -6 \Rightarrow B_1[-6; 1]$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow B_2[2; 1]$$

Př. 5: Na ose x najdi bod A tak, aby byl od bodu $B[-3;2]$ vzdálený $2\sqrt{10}$.

Problém: Dosazením do vzorce pro vzdálenost můžeme získat maximálně jednu rovnici \Rightarrow musíme určit jednu ze souřadnic bodu A .

Bod A je na ose $x \Rightarrow y$ -ová souřadnice bodu je nula $\Rightarrow A[x;0]$

Teď má cenu dosazovat: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(-3 - x)^2 + (2 - 0)^2} = 2\sqrt{10}$

$$\sqrt{(3+x)^2 + 4} = 2\sqrt{10} \quad /^2$$

$$9 + 6x + x^2 + 4 = 4 \cdot 10$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

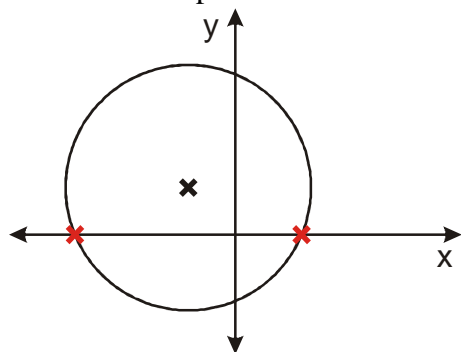
$$(x+9)(x-3) = 0$$

$$x_1 = -9 \Rightarrow A_1[-9;0]$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow A_2[3;0]$$

Je rozumné, že jsme v předchozím příkladu získali dva body?

Určitě je. Body vzdálené od bodu $B[-3;2]$ o $2\sqrt{10}$, tvoří kružnici. Osa x se s takovou kružnicí může protínat ve dvou bodech.



Pedagogická poznámka: Od začátku je nutné vést studenty k tomu, aby ještě před řešením příkladu měli přibližnou představu o výsledku. Náčrtky nemusí být konkrétní, naopak snažím se zabránit tomu, aby kreslili přesnou polohu bodů v souřadnicích.

Př. 6: Rozhodni, který z následujících vzorců, správně určuje vzdálenost bodu A, B v prostoru:

a) $|AB| = \sqrt[3]{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

b) $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Správný vzorec je $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Několik důvodů:

- Vzdálenost musí být v metrech a tedy může jít o druhou odmocninu ze součtu druhých mocnin souřadnic. Pokud vzorec obsahoval třetí odmocninu, museli bychom ji počítat ze součtu třetích mocnin.
- Vzdálenost dvou bodů v prostoru odpovídá tělesové úhlopříčce kváдру \Rightarrow vzorec je opět aplikací Pythagorovy věty.

Vzdálenost bodů $A[a_1; a_2; a_3]$ a $B[b_1; b_2; b_3]$ v prostoru udává vzorec

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Pedagogická poznámka: Poměrně dost studentů vyhodnotí jako správnou první možnost.

Zdůvodní to většinou stylem: „když se tam sčítají tři závorky, musí se udělat třetí odmocnina“, nebo „ve dvou rozměrech byla druhá odmocnina, ve třech musí být třetí“. Jde o dobrý test toho, zda jsou schopni rozlišit povrchní nebo vnitřní podobnosti.

Př. 7: Urči vzdálenost bodů a) $A[1;1;-2]$ a $B[2;3;-1]$ b) $C[3;1;-1]$ a $D[0;1;-2]$.

$$\begin{aligned} \text{a) } |AB| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + [-1-(-2)]^2} = \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } |CD| &= \sqrt{(d_1 - c_1)^2 + (d_2 - c_2)^2 + (d_3 - c_3)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (1-1)^2 + [(-2)-(-1)]^2} = \\ &= \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Př. 8: Na ose z najdi bod, který má od bodu $C[2;-2;1]$ vzdálenost 3.

Podobné jednomu z předchozích příkladů \Rightarrow bod na ose z má nenulovou pouze z -ovou souřadnici $Z[0;0;z]$.

Dosazení do vzorce pro vzdálenost

$$|CZ| = \sqrt{(z_1 - c_1)^2 + (z_2 - c_2)^2 + (z_3 - c_3)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + [0-(-2)]^2 + (z-1)^2} = 3$$

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + (z-1)^2} = 3 \quad /^2$$

$$4 + 4 + z^2 - 2z + 1 = 9$$

$$z^2 - 2z = 0$$

$$z(z-2) = 0$$

$$z_1 = 2 \Rightarrow Z_1[0;0;2]$$

$$z_2 = 0 \Rightarrow Z_2[0;0;0]$$

Př. 9: Na ose x najdi bod, který má od bodu $A[5;-4;-2]$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $B[-1;2;1]$.

Bod na ose $x \Rightarrow$ souřadnice $X[x;0;0]$.

Má platit: $|XA| = 2|XB|$, dosadíme:

$$\sqrt{(x-5)^2 + [0-(-4)]^2 + [0-(-2)]^2} = 2\sqrt{[x-(-1)]^2 + (0-2)^2 + (0-1)^2}$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \quad /^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + 16 + 4 = 4(x^2 + 2x + 1 + 4 + 1)$$

$$x^2 - 10x + 45 = 4x^2 + 8x + 24$$

$$0 = 3x^2 + 18x - 21$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$(x+7)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -7 \Rightarrow X_1[-7; 0; 0]$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow X_2[1; 0; 0]$$

Př. 10: Petáková:

strana 109/cvičení 55

strana 109/cvičení 57

Shrnutí: Vzorec pro vzdálenost bodů je aplikací Pythagorovy věty.