7.2.4 Násobení vektoru číslem

Předpoklady: 7203

Tentokrát začneme hned definicí.

Násobek nulového vektoru číslem *k* je nulový vektor.

Násobek nenulového vektoru $\boldsymbol{u} = B - A$ číslem *k* je vektor $C - A$, přičemž *C* je bod, pro který platí:

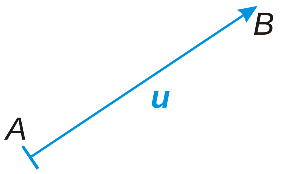
- $|AC| = |k||AB|$
- je-li $k \geq 0$ leží bod *C* na polopřímce *AB*, je-li $k < 0$, leží bod *C* na polopřímce opačné k polopřímce *AB*.

Vektor $C - A$ označujeme symbolem $k\boldsymbol{u}$.

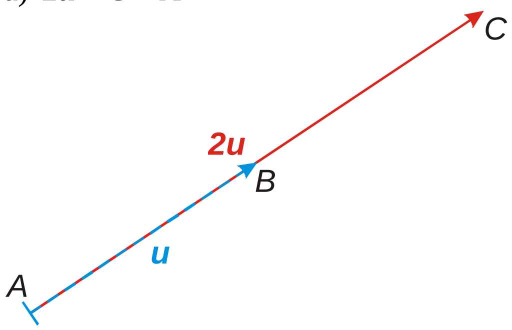
Velmi podobné definici stejnolehlosti $\Rightarrow$ bod *C* je stejnolehlý s bodem *B* ve stejnolehlosti $H(A;k)$.

Př. 1: Je dán vektor $\boldsymbol{u} = B - A$. Sestroj graficky vektory:

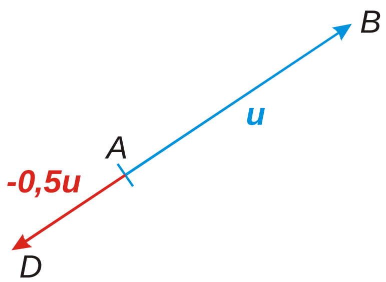
a) $2\boldsymbol{u} = C - A$ b) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{u} = D - A$



a) $2\boldsymbol{u} = C - A$



b) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{u} = D - A$



Ještě zbývá dokázat, že výsledný vektor nezávisí na volbě umístění vektoru $\boldsymbol{u}$. Důkaz využívající posunutí přeskočíme.

Jaké budou souřadnice vektoru $k\boldsymbol{u}$?
Pomocí stejnolehlosti se dají odvodit věty:

Pro každý vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ v rovině a pro každé reálné číslo k platí:
$k\boldsymbol{u} = (ku_1; ku_2)$.
Pro každý vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$ v prostoru a pro každé reálné číslo k platí:
$k\boldsymbol{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$.

Př. 2: Je dán vektor $\boldsymbol{u} = (1; 2; -3)$. Urči souřadnice vektorů:
a) $2\boldsymbol{u}$ b) $-3\boldsymbol{u}$ c) $\sqrt{2} \cdot \boldsymbol{u}$

a) $2\boldsymbol{u} = 2(1; 2; -3) = (2 \cdot 1; 2 \cdot 2; 2 \cdot [-3]) = (2; 4; -6)$

b) $-3\boldsymbol{u} = -3(1; 2; -3) = (-3 \cdot 1; -3 \cdot 2; -3 \cdot [-3]) = (-3; -6; 9)$

c) $\sqrt{2} \cdot \boldsymbol{u} = \sqrt{2}(1; 2; -3) = (\sqrt{2} \cdot 1; \sqrt{2} \cdot 2; \sqrt{2} \cdot [-3]) = (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$

Pedagogická poznámka: Stejně jako u sčítání doporučuji studentům psát zkrácený zápis takto: $2\boldsymbol{u} = 2(1; 2; -3) = (2; 4; -6)$.

Př. 3: Doplň větu s pravidly:
Pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a každá dvě čísla k, l platí:
a) $0 \cdot \boldsymbol{u} =$ b) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} =$ c) $k(l\boldsymbol{u}) =$
d) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) =$ e) $(k + l)\boldsymbol{u} =$

a) $0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ b) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ c) $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$
d) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ e) $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$

Platí pravidla, která známe z násobení reálných čísel $\Rightarrow$ při násobení vektorů budeme moci postupovat tak, jak jsme zvyklí.

Př. 4: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (1; -3; 1)$ a $\boldsymbol{v} = (2; 2; -1)$. Urči vektor $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$.

$\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = 2(1; -3; 1) - 3(2; 2; -1) = ([2 \cdot 1 - 3 \cdot 2]; [2 \cdot (-3) - 3 \cdot 2]; [2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)]) =$
$= (-4; -12; 5)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je možné řešit i postupně určením násobků a pak jejich součtu.

Pedagogická poznámka: Pokud začínám s touto hodinou během vyučovací hodiny, kterou jsem na začátku věnoval velikosti vektoru, končím ekvivalentem příkladu 4 a další hodinu začínám příkladem 4.

Vektor $\boldsymbol{w}$ jsme získali jako součet násobků vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, říkáme, že vektor $\boldsymbol{w}$ je **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Jsou dány vektory $\boldsymbol{u}_1;\boldsymbol{u}_2;...;\boldsymbol{u}_n$ a reálná čísla $a_1;a_2;...;a_n$. Vektor $\boldsymbol{v}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+..+a_n\boldsymbol{u}_n$ se nazývá lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}_1;\boldsymbol{u}_2;...;\boldsymbol{u}_n$. Reálná čísla $a_1;a_2;...;a_n$ nazýváme koeficienty této lineární kombinace.

Př. 5: V příkladu 4 byl hledaný vektor $\boldsymbol{w}$ jako lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ určen vztahem $\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$. Urči koeficienty této lineární kombinace a číslo *n*.

$\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{w}$ je lineární kombinací dvou vektorů $\Rightarrow$ $n=2$

srovnáme vztahy: $\begin{matrix}\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{v}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2\end{matrix}$ $\Rightarrow$ $a_1=2$, $a_2=-3$

Pedagogická poznámka: Jako vždy v podobných příkladech i tady mají studenti největší problémy s určením čísla *n*.

Př. 6: Jsou dány vektory $\boldsymbol{a}=(-1;2;4)$ a $\boldsymbol{b}=(2;1;1)$. Rozhodni zda vektory:

a) $\boldsymbol{u}=(-5;5;11)$ b) $\boldsymbol{v}=(1;3;3)$

jsou lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Pokud ano, urči koeficienty této lineární kombinace.

a) $\boldsymbol{u}=(-5;5;11)$

pokud je vektor $\boldsymbol{u}$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ musí platit:

$\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ - protože vektory mají tři souřadnice, jde o soustavu tří rovnic (pro každou souřadnici jedna) pro dvě neznámé (hledané koeficienty *k*, *l*): $\begin{matrix}u_1=ka_1+lb_1\\ u_2=ka_2+lb_2\\ u_3=ka_3+lb_3\end{matrix}$

Dosadíme souřadnice: $\begin{matrix}-5=k(-1)+l\cdot 2\\ 5=k\cdot 2+l\cdot 1\\ 11=k\cdot 4+l\cdot 1\end{matrix}$

Odečteme druhou rovnici od třetí:

$11-5=4k-2k+l-l$

$6=2k\Rightarrow k=3$

Z druhé rovnice dopočítáme *l*: $5=3\cdot 2+l\Rightarrow l=-1$

Dosadíme do první rovnice a zkontrolujeme zda vyjde:

$-5=3(-1)+(-1)\cdot 2=-5$

Soustava má řešení $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

b) $\boldsymbol{v}=(1;3;3)$

pokud je vektor $\boldsymbol{v}$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ musí platit:

$\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ - protože vektory mají tři souřadnice, jde o soustavu tří rovnic (pro každou souřadnici jedna) pro dvě neznámé (hledané koeficienty *k*, *l*):

$$\begin{aligned} v_1 &= ka_1 + lb_1 \\ v_2 &= ka_2 + lb_2 \\ v_3 &= ka_3 + lb_3 \end{aligned}$$

Dosadíme souřadnice:

$$\begin{aligned} 1 &= k(-1) + l \cdot 2 \\ 3 &= k \cdot 2 + l \cdot 1 \\ 3 &= k \cdot 4 + l \cdot 1 \end{aligned}$$

Odečteme druhou rovnici od třetí:

$3 - 3 = 4k - 2k + l - l$

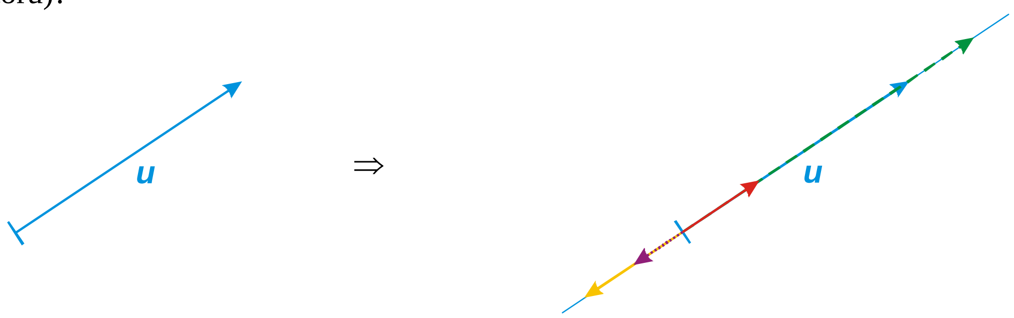
$0 = 2k \Rightarrow k = 0$

Z druhé rovnice dopočítáme *l*: $3 = 0 \cdot 2 + l \Rightarrow l = 3$

Dosadíme do první rovnice a zkontrolujeme zda vyjde:

$1 = 0(-1) + 3 \cdot 2 = 6$ - rovnost neplatí $\Rightarrow$ soustava nemá řešení $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{v}$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Co získáme, když budeme dělat násobky vektoru $\boldsymbol{u}$ (fakticky lineární kombinace z jednoho vektoru)?



Získáme násobky tohoto vektoru. Všechny tyto vektory leží na stejné přímce (mají stejný nebo opačný směr). $\Rightarrow$

Dva vektory leží na stejné přímce (jsou rovnoběžné), právě když je jeden násobkem druhého.

(to není žádná významná věta, ale budeme ji často používat)

Teď můžeme určit vektor, který bude mít určitý směr a potřebnou velikost.

Př. 7: Najdi vektor $\boldsymbol{v}$, který je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u} = (3;4)$ a jehož velikost je 1.

Dvě možnosti jak příklad vyřešit:

1. Sestavení podmínek pro souřadnice vektoru $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$

vektor $\boldsymbol{v}$ je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{v}$ je násobek vektoru $\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$

v souřadnicích: $v_1 = ku_1$, $v_2 = ku_2$

zatím dvě rovnice pro tři neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme ještě jednu rovnici.

podmínka: velikost $\boldsymbol{v}$ je 1 $\Rightarrow$ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$.

Máme tři rovnice pro tři neznámé. Vyřešit by to šlo, ale není to moc komfortní.

2. Využití velikosti vektoru $\boldsymbol{u}$.

Spočítáme velikost vektoru $\boldsymbol{u}$: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Vektor $\boldsymbol{v}$ má mít velikost 1 $\Rightarrow$ musí být 5krát menší $\Rightarrow$

platí: $\boldsymbol{v} = k \cdot \boldsymbol{u}$, kde $k \in \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$

$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{5}\boldsymbol{u} = -\frac{1}{5}(3;4) = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ $\quad$ $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{5}\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}(3;4) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

Pedagogická poznámka: Slušný chaos můžete ve třídě vyvolat pokud ukážete na tabuli, že vektor ***v*** má být pětkrát menší, existují tedy dvě řešení pro $k \in \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$ a napíšete $\boldsymbol{v}_1 =$ a $\boldsymbol{v}_2 =$. Někteří studenti se přestanou orientovat, že nejde o složky, ale o celé vektory a totálně zpanikaří.

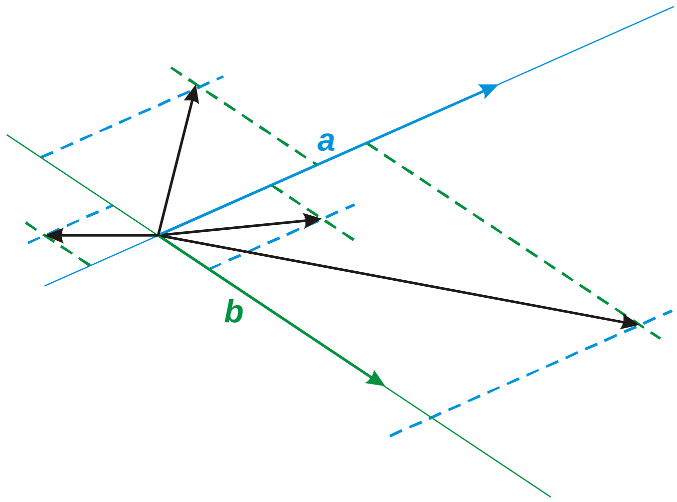
Př. 8: Najdi vektor ***w***, který je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u} = (3;4)$ a jehož velikost je 10.

Spočítáme velikost vektoru ***u***: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Vektor ***w*** má mít velikost 10 $\Rightarrow$ musí být 2krát větší

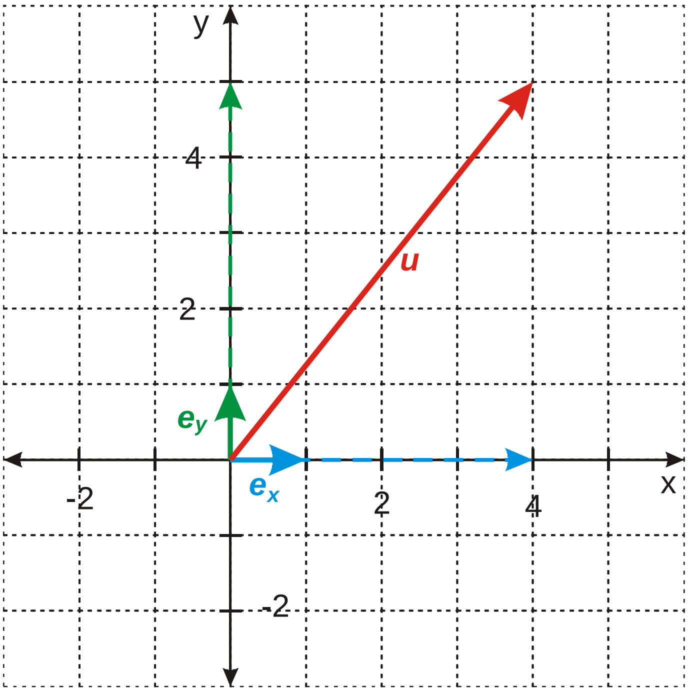
$\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} = 2(3;4) = (6;8)$

Máme dva vektory ***a***, ***b*** v rovině. Co získáme, když budeme vyrábět jejich všechny možné lineární kombinace?



Získáme všechny vektory v rovině.

Co vlastně znamená, že vektor ***u*** má souřadnice $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$?



Souřadnice vektoru jsou vlastně koeficienty lineární kombinace, kterou sestavíme tento vektor pomocí jednotkových vektorů ve směrech souřadných os.

Př. 9: Petáková:
strana 99/cvičení 5
strana 100/cvičení 8
strana 100/cvičení 9
strana 100/cvičení 10

Shrnutí: Při násobení vektoru číslem se mění jeho velikost $\Rightarrow$ navzájem rovnoběžné vektory jsou svými násobky.