7.3.3 Vzájemná poloha parametricky vyjádřených přímek II

Předpoklady: 7302

Př. 1: Urči vzájemnou polohu přímek AB a CD. $A[-2;3]$, $B[4;-1]$, $C[7;2]$, $D[-1;4]$. Pokud jsou přímky různoběžné najdi jejich průsečík.

přímka AB: $B-A=(6;-4) \Rightarrow \boldsymbol{u}=(3;-2)$ vydělíme vektor $B-A$ dvěma, abychom měli menší čísla a jednodušší počítání
přímka CD: $D-C=(-8;2) \Rightarrow \boldsymbol{v}=(-4;1)$
neplatí $\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{u} \Rightarrow$ přímky jsou různoběžné $\Rightarrow$ hledáme průsečík
přímka AB: $\begin{aligned} x&=-2+3t \\ y&=3-2t, t\in R \end{aligned}$ přímka CD: $\begin{aligned} x&=7-4s \\ y&=2+s, s\in R \end{aligned}$
Průsečík vyhovuje rovnicím obou přímek $\Rightarrow$ soustava rovnic:

$$-2+3t=7-4s$$
$$\underline{3-2t=2+s}$$
$$3t+4s=9$$
$$\underline{-2t-s=-1 \Rightarrow s=1-2t}$$
$$3t+4s=3t+4(1-2t)=9$$
$$3t+4-8t=9$$
$$-5t=5 \Rightarrow t=-1$$

Určíme průsečík: $\begin{aligned} x&=-2+3t=-2+3(-1)=-5 \\ y&=3-2t=3-2(-1)=5 \end{aligned}$

Přímky AB a CD jsou různoběžné, protínají se v bodě $P[-5;5]$.

Pedagogická poznámka: „Krácení“ směrových vektorů je dobré studentům opět ukázat. Ve sbírkách se takto směrové vektory upravují velice často, studenti však ze své vůle většinou nekrátí.

Př. 2: Urči průsečíky přímek p: $\begin{aligned} x&=1-2t \\ y&=3+t, t\in R \end{aligned}$ a q: $\begin{aligned} x&=2+4s \\ y&=2-2s, s\in R \end{aligned}$. Na základě výsledku rozhodni, jaká je jejich vzájemná poloha.

Průsečík vyhovuje rovnicím obou přímek:

$$1-2t=2+4s$$
$$\underline{3+t=2-2s}$$
$$-2t-4s=1$$
$$\underline{t+2s=-1 \Rightarrow t=-1-2s}$$

Dosazení: $-2t-4s=-(-1-2s)-4s=1$

$$2+4s-4s=1$$

$2=1 \Rightarrow$ přímky nemají žádný průsečík $\Rightarrow$ jsou rovnoběžné

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pro studenty orientačně hodně náročný. Po přečtení zadání nechávám chvilku na rozmyšlenou a pak se společně domluvíme na strategii řešení. Během práce studentů pak kontroluji zápis do sešitů, většina problémů souvisí s tím, že studenti ztratí přehled o tom, co vlastně počítají.

Př. 3: Rozhodni které z následujících přímek jsou totožné:

a) $p(A,\boldsymbol{u})$, $A[4;1]$, $\boldsymbol{u}=(-2;2)$

b) q: $\begin{aligned} x &= 4+2t \\ y &= 1+t, t\in R \end{aligned}$

c) $r=\{[1-4t;4-2t], t\in R\}$

d) CD, $C[-2;-2]$, $D[6;2]$

Nejdříve srovnáme směrové vektory přímek:

p: $\boldsymbol{u}_p=(-2;2)$ q: $\boldsymbol{u}_q=(2;1)$ r: $\boldsymbol{u}_r=(-4;-2)$ CD: $\boldsymbol{u}_{CD}=D-C=(8;4)$

Z přehledu směrových vektorů je vidět, že navzájem jsou svými násobky vektory $\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_{CD}$ (platí: $\boldsymbol{u}_r=-2\boldsymbol{u}_q$, $\boldsymbol{u}_{CD}=4\boldsymbol{u}_q$) $\Rightarrow$ přímky *q*, *r* a *CD* mohou být totožné.

Zjistíme, zda počáteční body přímek *r* a *CD* leží na přímce *q*.

***r*:** počáteční bod přímky *r* $R[1;4]$ dosadíme do vyjádření přímky *q*:

$1=4+2t \Rightarrow 2t=-3 \Rightarrow t=-\frac{3}{2}$

$4=1+t \Rightarrow t=3$

bod *R* na přímce *q* neleží $\Rightarrow$ přímka *r* není totožná s přímkou *q*

***CD*:** bod přímky *CD*: $C[-2;-2]$ dosadíme do vyjádření přímky *q*:

$-2=4+2t \Rightarrow 2t=-6 \Rightarrow t=-3$

$-2=1+t \Rightarrow t=-3$

bod *C* na přímce *q* leží $\Rightarrow$ přímka *CD* je totožná s přímkou *q*

Ze čtyř zadaných přímek jsou totožné přímky *q* a *CD*.

Př. 4: Rozhodni, jak by vypadalo řešení předchozího příkladu v případě, že bychom během postupu použitého v řešení zjistili, že přímka *r* ani přímka *CD* nejsou totožné s přímkou *q*.

Pokud bychom zjistili, že ani jedna z přímek *r* a *CD* není totožná s přímkou *q*, museli bychom otestovat zda nejsou totožné přímky *r* a *CD*. Podle výsledku tohoto bychom rozhodli o konečném výsledku (žádné dvě přímky nejsou totožné nebo přímky *r* a *CD* jsou totožné).
Při řešení předchozího příkladu takové testování nemusíme provádět. Přímka *r* není totožná s přímkou *q*, se kterou je totožná přímka *CD* a proto nemohou být totožné ani přímky *r* a *CD*.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je synchronizační. Rychlejší části třídy trvá už jenom to, že musí pochopit zadání, s pomalejšími se zadání probere jako součást předchozího příkladu. Při kontrole na tabuli doporučuji zakreslit přímku *q* a pak do obrázku postupně přidávat další přímky (podle výsledků testování). Studenti tak velice rychle pochopí, o co v příkladu jde.

Př. 5: Urči průsečíky přímek $p(A;\boldsymbol{u})$, $q(B;\boldsymbol{v})$. Na základě výsledku rozhodni, jaká je jejich vzájemná poloha. $A[-2;-1]$, $\boldsymbol{u}=(2;3)$, $B[2;5]$, $\boldsymbol{v}=(-4;-6)$.

přímka p: $\begin{aligned} x &= -2+2t \\ y &= -1+3t, t \in R \end{aligned}$ přímka q: $\begin{aligned} x &= 2-4s \\ y &= 5-6s, s \in R \end{aligned}$

Průsečík vyhovuje rovnicím obou přímek:

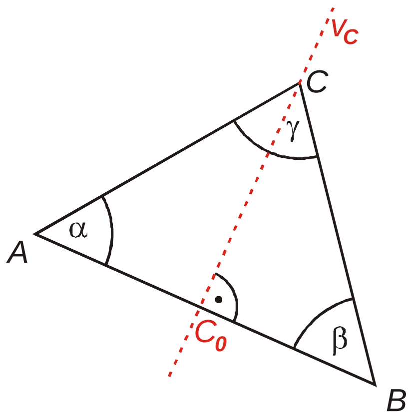
$$-2+2t = 2-4s$$
$$\underline{-1+3t = 5-6s}$$
$$2t+4s = 4 \quad /:2$$
$$\underline{3t+6s = 6 \quad /:3}$$
$$t+2s = 2$$
$$\underline{t+2s = 2}$$

Rovnice odečteme:

$0=0 \Rightarrow$ přímky p, q mají nekonečně mnoho společných bodů $\Rightarrow$ jsou totožné

Pedagogická poznámka: Pokud máme málo času, přeskakujeme příklad 5 a počítáme příklad 6. Je důležitější.

Př. 6: Urči souřadnice paty výšky v_C v trojúhelníku ABC, $A[-2;-1]$, $B[6;-5]$, $C[3;4]$.



Z obrázku je zřejmé, že souřadnice bodu C_0 získáme jako průsečík přímky AB a výšky v_C.

Přímka AB: $B-A=(8;-4) \Rightarrow \boldsymbol{u}=(2;-1)$

$$x=-2+2t$$
$$y=-1-t, t \in R$$

Přímka v_C: směrový vektor musí být kolmý na vektor přímky AB $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}=(1;2)$ (prohození souřadnic a obrácení jednoho znaménka)

$$x=3+s$$
$$y=4+2s, s \in R$$

Hledáme průsečík:

$$-2+2t=3+s$$
$$\underline{-1-t=4+2s}$$

$$2t - s = 5 \Rightarrow s = 2t - 5$$

$$\underline{-t - 2s = 5}$$

$$-t - 2s = -t - 2(2t - 5) = 5$$

$$-t - 4t + 10 = 5$$

$$-5t = -5$$

$$t = 1$$

Vypočteme souřadnice průsečíku: $\begin{array}{l} x = -2 + 2t = -2 + 2 \cdot 1 = 0 \\ y = -1 - t = -1 - 1 = -2 \end{array}$

Pata výšky v_C má souřadnice $C_0[0;-2]$.

Shrnutí: