

7.3.9 Směrnice tvar rovnice přímky

Předpoklady: 7306

Pedagogická poznámka: Stává se, že v hodině nestihneme poslední část s určováním vztahu mezi směnicemi kolmých přímek.

Vrátíme se k obecné rovnici přímky:

Obecná rovnice ve tvaru $ax + by + c = 0$ není jednoznačná. Obsahuje tři parametry, rovnice, které jsou navzájem svými násobky, popisují stejné přímky.

Jak popsat přímku jednoznačně?

Nápad: zápis lineární funkce $y = kx + q$ je jednoznačný, různé předpisy znamenají různé přímky.

Můžeme na tento tvar převést každou obecnou rovnici přímky?

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c \quad / : b \quad \text{vydělit můžeme jen, když platí } b \neq 0$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \text{- tohle jsme chtěli}$$

Pro které přímky, tento tvar nezískáme?

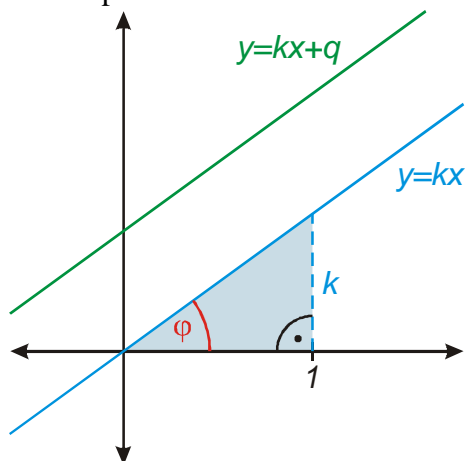
když $b = 0 \Rightarrow$ tedy přímky $ax + 0y + c = 0$

$ax = -c$ - přímky rovnoběžné s osou y . O těch jsme u lineárních funkcí nemluvili, nejde o grafy funkcí.

Rovnici každé přímky, která není rovnoběžná s osou y můžeme napsat ve tvaru $y = kx + q$. Tato rovnice se nazývá směrnice tvar rovnice přímky. Číslo k se nazývá směrnice přímky.

Význam koeficientů:

- q : posunutí po ose y
- k : udává směr přímky, jde o $\text{tg } \varphi$, kde φ je úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou x .



Z pravouhlého trojúhelníku je vidět, že platí: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{1} = k$

Př. 1: Je dána přímka $6x + 3y - 4 = 0$. Najdi směrnicevý tvar rovnice této přímky, urči odchylku této přímky od kladné poloosy x .

$$6x + 3y - 4 = 0$$

$$3y = -6x + 4$$

$$y = -2x + \frac{4}{3}$$

směrnice přímky $k = -2$

$$\operatorname{tg} \varphi = -2 \Rightarrow \varphi = 116^\circ 34'$$

Př. 2: Napiš obecnou rovnici a směrnicevý tvar rovnice přímky se směrnicí $k = 2$, která prochází bodem $A[1; -1]$.

Dosadíme do směrnicevého tvaru $y = kx + q$:

$$y = 2x + q \quad \text{ted' dosadíme bod } A[1; -1]$$

$$-1 = 2 \cdot 1 + q$$

$$q = -3$$

Směrnicevý tvar: $y = 2x - 3$

Obecná rovnice: $2x - y - 3 = 0$

Př. 3: Napiš ve směrnicevém tvaru rovnici přímky se směrnicí k , která prochází bodem $A[a_1; a_2]$.

Směrnicevý tvar: $y = kx + q$.

Dosadíme bod $A[a_1; a_2]$ do rovnice a dopočítáme q : $a_2 = ka_1 + q$

$$q = a_2 - ka_1$$

Dosadíme do rovnice: $y = kx + q = kx + a_2 - ka_1$

Častěji píšeme rovnici ve tvaru: $y - a_2 = k(x - a_1) \Rightarrow$ největší výhoda směrnicevého tvaru - snadno dokážeme zapsat přímku, která prochází bodem $A[a_1; a_2]$.

Přímku, která má směrnici k a prochází bodem $A[a_1; a_2]$ zapíšeme rovnicí

$$(y - a_2) = k(x - a_1).$$

Jak to funguje?

Př. 4: Ověř dosazením, že bod $A[a_1; a_2]$ vyhovuje rovnici $(y - a_2) = k(x - a_1)$ bez ohledu na směrnici k .

$$(y - a_2) = k(x - a_1) \quad \text{dosadíme bod } A[a_1; a_2]$$

$$(a_2 - a_1) = k(a_2 - a_1)$$

$$0 = k \cdot 0 \quad \text{vyjde bez ohledu na } k$$

Pedagogická poznámka: Příklady 3 a 4 opět ověřují správné chápání rovnic v analytické geometrii (rozdíl mezi koeficienty a, b, c (které se u konkrétních přímek liší a které určují o kterou přímku jde) a neznámými x, y (které slouží jako „připravená místa“ pro dosazení souřadnic bodů, jejichž vztah k přímce chceme zjišťovat).

Jak zapsat všechny přímky procházející daným bodem?

- mají různý směr \Rightarrow použijeme $k \in R$
- prochází bodem $A[a_1; a_2] \Rightarrow$ použijeme tvar $(y - a_2) = k(x - a_1)$
- **POZOR!!!** Přímku rovnoběžnou s osou y nemůžeme napsat ve směrnicovém tvaru \Rightarrow musíme ji napsat zvlášť: $x = a_1$

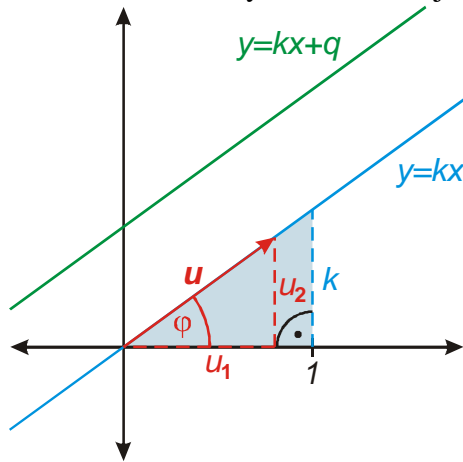
Př. 5: Zapiš všechny přímky, které procházejí bodem $[3; 1]$.

Použijeme směrnicový tvar: $y - a_2 = k(x - a_1) \quad k \in R$

$$y - 1 = k(x - 3), \quad k \in R$$

ještě rovnoběžka s osou y : $x = 3$

Směrnice i směrový vektor udávají směr přímky \Rightarrow musí spolu souviset. Jak?



Z obrázku je vidět, že platí $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{1} = k = \frac{u_2}{u_1}$

Př. 6: Pomocí směrnicového tvaru napiš rovnici přímky AB , která prochází body $A[1; 3]$, $B[-1; 4]$.

Nejdříve určíme směrnici pomocí směrového vektoru, pak dosadíme do tvaru pro přímku procházející bodem.

$$\text{směrový vektor: } B - A = (-2; 1) \Rightarrow u = (-2; 1) \Rightarrow k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Přímka procházející bodem: $(y - a_2) = k(x - a_1)$

Dosadíme bod $A[1;3]$ a směrnici $k = -\frac{1}{2}$: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Dodatek: Získaná rovnice samozřejmě nezávisí na tom, který bod použijeme pro dosazení:

$$\text{Dosadíme bod } B[-1;4]: y - 4 = -\frac{1}{2}(x - (-1))$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 1) \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow \text{stejný výsledek.}$$

Jaký je vztah mezi směrnici navzájem kolmých přímek?

Napišeme si dvě kolmice ve směrnicovém tvaru:

$$p: y = kx + q \quad q: y = k'x + q'$$

Přepíšeme do obecného tvaru:

$$p: kx - y + q = 0 \quad q: k'x - y + q'$$

Kolmost můžeme určit z normálových vektorů:

$$\mathbf{n}_p = (k; -1) \quad \mathbf{n}_q = (k'; -1)$$

Dva vektory jsou kolmé, když je jejich skalární součin roven nule.

$$\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q = (k; -1)(k'; -1) = k \cdot k' + (-1)(-1) = 0$$

$$k \cdot k' + 1 = 0$$

$$k \cdot k' = -1$$

$$k' = -\frac{1}{k}$$

Př. 7: Najdi směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází bodem $A[1;2]$ a je kolmá na přímkou $y = 2x + 1$.

Směrnice původní přímky: $k = 2 \Rightarrow$ směrnice kolmice: $k' = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}$

Do rovnice $y = -\frac{1}{2}x + q$ dosadíme bod $A[1;2]$: $2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + q \Rightarrow q = 2$

Hledaná přímka má rovnici: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Př. 8: Petáková:
strana 105/cvičení 3

Shrnutí: Směrnicový tvar (předpis lineární funkce) umožňuje snadno zapsat přímku procházející bodem.