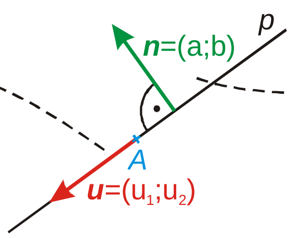
7.3.11 Polohové úlohy v rovině

Předpoklady: 7310

Pedagogická poznámka: Pokud necháte studenty sestavit přehled při hodině a budete chtít spočítat všechny příklady, budete potřebovat dvě vyučovací hodiny. Hodinu je možné stihnout i během 45 minut, přehled si studenti udělají doma, ve škole ho pouze zkontrolujete a u příkladů si projdete řešení bez toho, aby je studenti dopočítávali.

Př. 1: Zkus přehledně uspořádat dosud probrané poznatky z analytické geometrie. Jak spolu a se způsoby zadání přímky souvisí parametrické vyjádření přímky, její obecná rovnice, směrnicový a úsekový tvar? Se kterým z uvedených způsobů vyjádření přímky, souvisí nerovnice pro polorovinu?



parametrické vyjádření

$X = A + t\boldsymbol{u}$ $\qquad$ $x = a_1 + tu_1$, $y = a_2 + tu_2$ $t \in R$

omezením parametru, můžeme vyjádřit i části přímky

nejednoznačnost

obecná rovnice

$ax + by + c = 0$

c získáme dosazením bodu

směrnicový tvar

$y = kx + q$

přímka procházející bodem

$y - a_2 = k(x - a_1)$

úsekový tvar

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

průsečíky s osami

$P[p;0], Q[0;q]$

nerovnice pro polorovinu

$ax + by + c \geq 0$

body ve stejné polorovině mají stejné znaménko

x,y - neznámé, místo pro dosazení souřadnic bodů

a,b,c,p,q,a_1, a_2,... - čísla, která rozlišují různé přímky od sebe navzájem

průsečíky - splňují obojí rovnice- řešení soustav

Př. 2: Urči vzájemnou polohu přímek $p: 2x - 3y + 1 = 0$ a $q = \{[1-6t; -2-4t], t \in R\}$.

Přímky jsou dány obecnou rovnicí a parametrickým vyjádřením $\Rightarrow$ snadno můžeme nalézt průsečíky a jejich počtu určíme vzájemnou polohu.

$p: 2x - 3y + 1 = 0$ a *q*: $\begin{array}{l} x = 1 - 6t \\ y = -2 - 4t, t \in R \end{array}$ $\Rightarrow$ dosadíme z vyjádření *q* do rovnice pro *p*:

$2(1-6t) - 3(-2-4t) + 1 = 0$

$2 - 12t + 6 + 12t + 1 = 0$

$9 = 0$ $\Rightarrow$ přímky *p* a *q* nemají společný bod $\Rightarrow$ jsou rovnoběžné

Pedagogická poznámka: Studenti samozřejmě mohou postupovat i spoustou jiných způsobů. Poměrně často se stává, že si studenti, kteří vzájemnou polohu určují z vektorů, neuvědomí, že pro přímku p získají z rovnice normálový vektor, pro přímku q vektor směrový a tedy nemohou očekávat, že při rovnoběžnosti těchto přímek by jeden z těchto vektorů byl násobkem druhého.

Př. 3: Najdi obecnou rovnici osy úsečky AB; $A[-2;1]$, $B[4;-3]$.

osa úsečky AB je přímka kolmá na úsečku AB procházející jejím středem $\Rightarrow$
$\boldsymbol{u}_{AB} = B - A = (6;-4)$ je směrový vektor přímky AB a tedy jeden z normálových vektorů hledané osy $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}_{osy} = (3;-2)$ (vektor zkrátíme) $\Rightarrow$
obecná rovnice osy: $3x - 2y + c = 0$
bod na ose $S_{AB}[1;-1]$ $\Rightarrow$ $3\cdot 1 - 2(-1) + c = 0$ $\Rightarrow$ $c = -5$
rovni osy úsečky AB: $3x - 2y - 5 = 0$

Pedagogická poznámka: Pokud jste vynechali hodinu 7307 mají studenti s příkladem obrovské problémy. Je potřeba, aby si nakreslili obrázek a ujasnili si, jaký vektor pro sestavení obecné rovnice osy hledají (z obrázku jim pak dojde, že hledaným vektorem je vektor $B - A$). Je potřeba zabránit tomu, aby se v jejich poznámkách objevily zápisy typu:

$\boldsymbol{u} = B - A = (6;-4)$ $\qquad$ $\boldsymbol{n} = (6;-4)$

Není z nich jasné, že jde o vektory, které popisují dvě různé přímky a někteří studenti pak získávají pocit, že normálový vektor může být někdy shodný se směrovým.

Př. 4: Které z následujících přímek jsou totožné?:

a) $4x - 2y + 2 = 0$ b) $\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 + 2t, t \in R \end{aligned}$ c) $\{[1-t; 1-2t], t \in R\}$

d) $y = 2x + 1$ e) $-2x + y + 1 = 0$ f) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$

Totožnost přímek snadno poznáme z obecné rovnice $\Rightarrow$ převedeme všechna vyjádření na obecné rovnice, které pokrátíme tak, aby před x bylo číslo 2 (tak můžeme pokrátit obecnou rovnici v bodě a))

a) $4x - 2y + 2 = 0$ $\Rightarrow$ $2x - y + 1 = 0$

b) $\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 + 2t, t \in R \end{aligned}$

vyloučíme parametr z první rovnice: $x = -1 + t$ $\Rightarrow$ $t = x + 1$
dosadíme do druhé rovnice: $y = 1 + 2(x+1) = 1 + 2x + 2 = 2x + 3$ $\Rightarrow$ $2x - y + 3 = 0$

c) $\{[1-t; 1-2t], t \in R\}$ $\Rightarrow$ $\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 1 - 2t, t \in R \end{aligned}$

vyloučíme parametr z první rovnice: $x = 1 - t$ $\Rightarrow$ $t = 1 - x$
dosadíme do druhé rovnice: $y = 1 - 2(1-x) = 1 - 2 + 2x = 2x - 1$ $\Rightarrow$ $2x - y - 1 = 0$

d) $y = 2x + 1$ $\Rightarrow$ $2x - y + 1 = 0$

e) $-2x+y+1=0 \Rightarrow 2x-y-1=0$

f) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \Rightarrow 2x+y=4 \Rightarrow 2x+y-4=0$

$\Rightarrow$ Přímky a) až e) jsou rovnoběžné. Totožné jsou pak dvě dvojice přímek: přímky a), d) a přímky c), e).

Pedagogická poznámka: Snažím se, aby si studenti uvědomili, že je velmi výhodné v situaci, kdy sledovaných přímek poměrně dost, se pořádně rozmyslet, jaký postup je nejvhodnější.

Př. 5: Je dán trojúhelník *ABC*; $A[-1;-2]$, $B[3;-4]$, $C[5;5]$. Najdi patu výšky v_c. Najdi vyjádření výšky v_c (je myšlena přímo úsečka, ne přímka na které v_c leží).

Pata výšky v_c je průsečík přímky *AB* s přímkou, na které leží výška v_c (kolmice na *AB* procházející bodem *C*).
Průsečík nejsnáze určíme, pokud je jedna z přímek vyjádřena parametricky a druhá obecnou rovnicí. Protože úsečku můžeme vyjádřit pouze parametricky najdeme obecnou rovnici přímky *AB* a parametrické vyjádření přímky, na které leží v_c.

přímka *AB*:

$B-A=(4;-2) \Rightarrow \boldsymbol{u}_{AB}=(2;-1) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{AB}=(1;2) \Rightarrow$ rovnice $x+2y+c=0$

dosadíme bod *A*: $-1+2(-2)+c=0 \Rightarrow c=5$

$x+2y+5=0$

přímka na které leží v_c:

je kolmá na přímku *AB* $\Rightarrow \boldsymbol{u}_{v_c}=\boldsymbol{n}_{AB}=(1;2)$. Použijeme bod $C[5;5]$

přímka, na které leží v_c: $\begin{array}{l} x=5+t \\ y=5+2t, t\in R \end{array}$

pata výšky v_c:

hledáme průsečík nalezených přímek $x+2y+5=0$ a $\begin{array}{l} x=5+t \\ y=5+2t, t\in R \end{array}$

$(5+t)+2(5+2t)+5=0$

$5+t+10+4t+5=0$

$5t=-20$

$t=-4$

dopočteme patu výšky C_0: $\begin{array}{l} x=5+t=5+(-4)=1 \\ y=5+2t=5+2(-4)=-3 \end{array}$

Patou výšky je bod $C_0[1;-3]$.

vyjádření výšky v_c: $\begin{array}{l} x=5+t \\ y=5+2t, t\in \langle -4;0\rangle \end{array}$

Výška v_c je úsečka ohraničená body *C* ($t=0$) a C_0 ($t=-4$).

Pedagogická poznámka: Opět zdůrazňuji studentům, aby si příklad dobře rozmysleli. Pokud nevyjádří přímku, na které leží výška parametricky, najdou sice průsečík, ale vyjádření výšku musí spočítat celé. Při postupu použitém v řešení mají vyjádření výšky hotové prakticky ihned.

Př. 6: Napiš pomocí parametru všechny přímky, které procházejí bodem $B[-2;3]$ a s osou x svírají kladný úhel větší než $45°$.

Zapisujeme přímky procházející daným bodem $\Rightarrow$ směrnicový tvar $y-a_2=k(x-a_1)$

Dosadíme bod $B[-2;3]$: $y-3=k(x-[-2])$

zbývá určit hodnoty směrnice k: kladný úhel větší než $45°$, $k=\mathrm{tg}\varphi \Rightarrow k\in\langle 1;\infty)$

$\Rightarrow\ y-3=k(x+2)$, $k\in\langle 1;\infty)$

Př. 7: Urči všechny hodnoty parametru m, pro které jsou přímky $p: mx+6y-2my+3=0$ a $q: 2x+my+1=0$ a) navzájem kolmé b) rovnoběžné.

a) přímky jsou navzájem kolmé

přímky jsou navzájem kolmé, když jsou navzájem kolmé jejich normálové vektory a tedy je nulový jejich skalární součin: $\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{n}_q=0$ $\boldsymbol{n}_p=(m;6-2m)$, $\boldsymbol{n}_q=(2;m)$

Dosadíme: $\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{n}_q=(m;6-2m)\cdot(2;m)=2m+6m-2m^2=0$

$8m-2m^2=0$

$m(4-m)=0 \Rightarrow m_1=0,\ m_2=4$

b) přímky jsou navzájem rovnoběžné

přímky jsou navzájem rovnoběžné, když jejich normálové vektory jsou svými násobky:

$\boldsymbol{n}_p=k\cdot\boldsymbol{n}_q$ $\boldsymbol{n}_p=(m;6-2m)$, $\boldsymbol{n}_q=(2;m)$

Dosadíme: $\boldsymbol{n}_p=k\cdot\boldsymbol{n}_q \Rightarrow (m;6-2m)=k(2;m)$

Soustava rovnic: $$\begin{aligned} m&=2k\\ 6-2m&=km\end{aligned}$$

Z první rovnice dosadíme do druhé: $6-2\cdot 2k=k\cdot 2k \quad /:2$

$3-2k=k^2$

$k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0$

$k_1=-3 \Rightarrow m_1=2k=2\cdot(-3)=-6$ $k_2=1 \Rightarrow m_2=2k=2\cdot 1=2$

Př. 8: Najdi přímku, která prochází bodem $A[2;3]$ a platí pro ní, že její průsečík s osou x je od počátku soustavy souřadnic dvakrát vzdálenější než průsečík s osou y.

Zajímáme se o průsečíky s osami $\Rightarrow$ použijeme úsekový tvar $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$.

Průsečík s osou x: $P[p;0] \Rightarrow$ průsečík s osou y: $Q\left[0;\pm\frac{p}{2}\right]$ (aby vzdálenost od počátku byla poloviční než u průsečíku s osou y) $\Rightarrow$ pokračujeme ve dvou sloupcích

$q = \frac{p}{2}$ $\qquad$ $q = -\frac{p}{2}$

Dosadíme do rovnice přímky:

$\frac{x}{p} + \frac{y}{\frac{p}{2}} = \frac{x}{p} + \frac{2y}{p} = 1$ $\qquad$ $\frac{x}{p} - \frac{y}{\frac{p}{2}} = \frac{x}{p} - \frac{2y}{p} = 1$

Rovnici přímky musí vyhovovat bod $A[2;3]$:

$\frac{2}{p} + \frac{2 \cdot 3}{p} = 1 \quad / \cdot p$

$2 + 6 = p$

$p = 8$

Přímka: $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$

Průsečíky: $P[8;0]$, $Q[0;4]$

$\frac{2}{p} - \frac{2 \cdot 3}{p} = 1 \quad / \cdot p$

$2 - 6 = p$

$p = -4$

Přímka: $-\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

Průsečíky: $P[-4;0]$, $Q[0;2]$

Př. 9: Jsou dány dvě přímky: jedna je zadána obecnou rovnicí, druhá parametricky. Rozhodni co nejrychleji, bez určení průsečíků, zda jsou rovnoběžné (případně totožné) nebo různoběžné. Navržený postup ověř na přímkách z příkladu 2.

Dvě přímky jsou rovnoběžné (nebo totožné) pokud mají stejný směr. Pokud je jedna z přímek dána obecnou rovnicí, musí být její normálový vektor kolmý na směrový vektor druhé přímky (aby byl jejím normálovým vektorem také) $\Rightarrow$ skalární součin normálového vektoru jedné a směrového vektoru druhé přímky musí být nulový.

$p: 2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n}_p = (2;-3)$

$q = \{[1-6t; -2-4t], t \in R\} \Rightarrow \boldsymbol{u}_q = (-6;-4)$

$\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{u}_q = (2;-3) \cdot (-6;-4) = 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-4) = 0 \Rightarrow$ přímky p, q jsou rovnoběžné nebo totožné.

Shrnutí: