7.3.12 Vzdálenost bodu od přímky I

Př. 1: Urči vzdálenost bodu P od přímky p. Příklad řeš ve dvou sloupcích, vlevo konkrétně pro bod $P[-4;2]$ a přímku $p: 3x-4y-5=0$, vpravo obecně pro bod $P[p_1;p_2]$ a přímku $p: ax+by+c=0$. Přímku kolmou na přímku p vyjádři parametricky.

1. Najdeme přímku q, která prochází bodem P a je kolmá na přímku p
2. Najdeme průsečík Q přímek p a q
3. Vzdálenost $d=|PQ|$ je vzdáleností bodu P od přímky p

Určení přímky *q*:

normálový vektor přímky p $\boldsymbol{n}_p=(3;-4)$ je směrovým vektorem kolmice q $\Rightarrow$

q: $\begin{aligned} x &= -4+3t \\ y &= 2-4t \end{aligned}$

Průsečík *Q* přímek *p* a *q*:

$p: 3x-4y-5=0$

q: $\begin{aligned} x &= -4+3t \\ y &= 2-4t \end{aligned}$

$3(-4+3t)-4(2-4t)-5=0$

$t=1$

Dosadíme do rovnice přímky q:

$x=-4+3t=-4+3\cdot 1=-1$

$y=2-4t=2-4\cdot 1=-2$

Průsečíkem je bod $Q[-1;-2]$.

Vzdálenost bodů *P* a *Q*

$|PQ|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}=$

$=\sqrt{(-1-(-4))^2+(-2-2)^2}=5$

Určení přímky *q*:

normálový vektor přímky p $\boldsymbol{n}_p=(a;b)$ je směrovým vektorem kolmice q $\Rightarrow$

q: $\begin{aligned} x &= p_1+at \\ y &= p_2+bt \end{aligned}$

Průsečík *Q* přímek *p* a *q*:

$p: ax+by+c=0$

q: $\begin{aligned} x &= p_1+at \\ y &= p_2+bt \end{aligned}$

$a(p_1+at)+b(p_2+bt)+c=0$

$a^2t+b^2t=-(ap_1+bp_2+c)$

$t=-\frac{(ap_1+bp_2+c)}{a^2+b^2}$

Průsečíkem je bod $Q[p_1+at;p_2+bt]$.

Vzdálenost bodů *P* a *Q*

$|PQ|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}=|t|\sqrt{a^2+b^2}$

Dosadíme parametr $t=-\frac{(ap_1+bp_2+c)}{a^2+b^2}$

$|PQ|=|t|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Vzdálenost bodu $P[p_1;p_2]$ od přímky $p: ax+by+c=0$ je dána vzorcem

$$d=|Pp|=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Z jakých částí se vzorec skládá:

- $|ap_1+bp_2+c|$ = dosazení bodu do rovnice přímky

  $\sqrt{a^2+b^2}$ = velikost normálového vektoru

Př. 2: Urči vzdálenost bodu $P[-4;2]$ od přímky $p: 3x-4y-5=0$ pomocí odvozeného vzorce.

$p: 3x-4y-5=0$ $\quad$ $P[-4;2]$ $\quad$ $d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\cdot(-4)-4\cdot 2-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-25|}{5}=5$

Př. 3: V trojúhelníku *ABC*: $A[2;-1]$, $B[1;4]$, $C[-3;-3]$ urči:
a) výšku v_c $\quad$ b) výšku v_b.

a) *AB*: $\boldsymbol{s}_{AB}=(-1;5)\Rightarrow \boldsymbol{n}_{AB}=(5;1)$ $\quad 5x+y+c=0$

Dosadíme bod $A[2;-1]$: $5\cdot 2+(-1)+c=0\Rightarrow c=-9$ přímka *AB*: $5x+y-9=0$

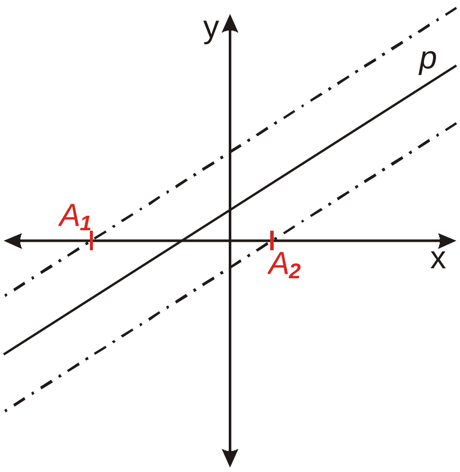
$v_C=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|5\cdot(-3)+1\cdot(-3)-9|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{|-27|}{\sqrt{26}}=\frac{27}{\sqrt{26}}$.

b) *AC*: $\boldsymbol{s}_{AC}=(-5;-2)\Rightarrow \boldsymbol{n}_{AC}=(2;-5)$ $\quad 2x-5y+c=0$

Dosadíme bod $A[2;-1]$: $2\cdot 2-5(-1)+c=0\Rightarrow c=-9$ $\quad$ přímka *AC*: $2x-5y-9=0$

$v_b=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot 1-5\cdot 4-9|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{|-27|}{\sqrt{29}}=\frac{27}{\sqrt{29}}$.

Př. 4: Na ose *x* najdi bod *A*, který má od přímky $p: x-2y+2=0$ vzdálenost $\sqrt{5}$. Než začneš příklad řešit analyticky, odhadni pomocí náčrtku počet řešení.



Souřadnice hledaného bodu: $A[a_x;0]$ (leží na ose *x*)

Určujeme jediné číslo $\Rightarrow$ dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky

$d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5}$ $\quad$ $\frac{|1\cdot a_x-2\cdot 0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$ $\quad$ $\frac{|a_x+2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$|a_x+2|=5$ $\Rightarrow$ na číselné ose hledáme čísla vzdálená od čísla -2 o 5

$a_{x1}=3$ $\quad$ $a_{x2}=-7$ Na ose *x* splňují zadání dva body: $A_1[3;0]$ a $A_2[-7;0]$.

Př. 5: Petáková:
strana 109/cvičení 63
strana 109/cvičení 66
strana 109/cvičení 68