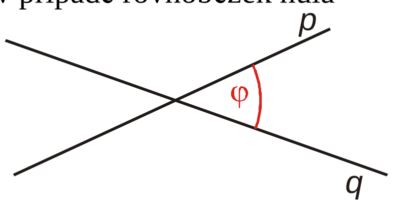
7.3.14 Odchylka přímek

Předpoklady: 7208, 7306

Př. 1: Zopakuj a porovnej definici a možné hodnoty:
a) planimetricky zavedené odchylky přímek
b) úhlu vektorů zavedeného v analytické geometrii.
Na základě porovnání navrhni postup pro výpočet odchylky přímek v analytické geometrii.

Planimetrická odchylka přímek

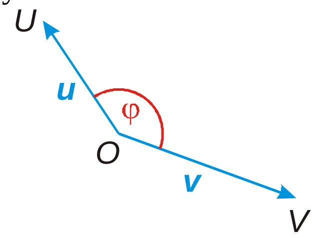
- v případě různoběžek velikost ostrého nebo pravého úhlu
- v případě rovnoběžek nula



$\varphi \in \langle 0;90 \rangle$

Úhel vektorů

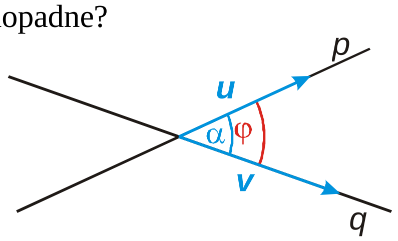
Velikost konvexního úhlu *UOV*, který vznikne z umístění vektorů ***u*** a ***v*** do orientovaných úseček *OU* a *OV*.



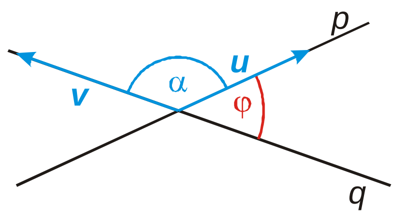
$\varphi \in \langle 0;180 \rangle$ $\quad \cos\varphi = \dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$

- Skalární součin vektorů umožňuje snadno určit úhel, který vektory svírají.
- Směr přímek je určen pomocí směrových vektorů.

$\Rightarrow$ Můžeme využít skalární součin směrových vektorů na výpočet odchylky přímek. Jak to dopadne?



Odchylka přímek se rovná úhlu směrových vektorů.



Pro odchylku přímek platí: $\varphi = 180° - \alpha$.

Možná řešení:

- Když vyjde tupý úhel, obrátíme jeden z vektorů.
- Když vyjde tupý úhel, dopočítáme odchylku do $180°$.
- Zamezíme hodnotám nad $90°$. Pro tyto hodnoty platí $\cos\varphi < 0$. $\Rightarrow$ Zabráníme tomu, aby byla hodnota zlomku záporná $\Rightarrow$ čitatel zlomku dáme do absolutní hodnoty (tím zároveň zabráníme tomu, aby odchylka závisela na orientaci směrového vektoru).

Odchylka přímek *p*, *q* se směrovými vektory ***u***, ***v*** je číslo $\varphi \in \left\langle 0;\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, pro které platí $\cos\varphi = \dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$.

Př. 2: Urči odchylku přímek *p*, *q*: *p*: $\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t, t \in R \end{array}$, $q = \{[2 - t; 3 + t], t \in R\}$.

Potřebujeme směrové vektory:

p: $\boldsymbol{u} = (2;-3) \Rightarrow |\boldsymbol{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ *q*: $\boldsymbol{v} = (-1;1) \Rightarrow |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

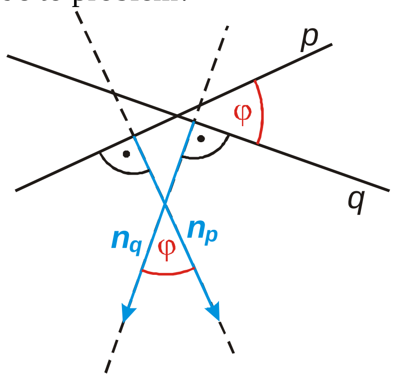
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (2;-3) \cdot (-1;1) = -2 - 3 = -5$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{13}\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 11°19'$$

Odchylka přímek *p*, *q* je $\varphi = 11°19'$.

Př. 3: Urči odchylku přímek $p: 2x - y + 3 = 0$ a $q: 3x + 2y - 1 = 0$.

Obě přímky jsou zadány obecnou rovnicí $\Rightarrow$ známe normálové vektory.
Je to problém?



Nemusíme je převádět na směrové vektory, protože odchylka přímek *p* a *q*, je stejná jako odchylka přímek, které jsou na ně kolmé (a které mají za směrové vektory normálové vektory přímek *p* a *q*).

$\boldsymbol{n}_p = (2;-1) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_p| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ $\boldsymbol{n}_q = (3;2) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_q| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (2;-1) \cdot (3;2) = 6 - 2 = 4$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q|}{|\boldsymbol{n}_p||\boldsymbol{n}_q|} = \frac{|4|}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}} \Rightarrow \varphi = 60°15'$$

Odchylka přímek *p*, *q* je $\varphi = 60°15'$.

Př. 4: Urči odchylku přímek *AB* a *p*. $A[-3;1]$, $B[1;2]$, $p: 2x - y + 3 = 0$.

Pro určení odchylky přímek můžeme požít dvojici směrových nebo normálových vektorů $\Rightarrow$ z normálového vektoru přímky *p* vypočteme její směrový vektor.

$\boldsymbol{u}_{AB} = B - A = (4;1) \Rightarrow |\boldsymbol{u}_{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$\boldsymbol{n}_p = (2;-1) \Rightarrow \boldsymbol{u}_p = (1;2) \Rightarrow |\boldsymbol{u}_p| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\boldsymbol{u}_{AB} \cdot \boldsymbol{u}_p = (4;1) \cdot (1;2) = 4 + 2 = 6$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}_{AB}\cdot\boldsymbol{u}_p|}{|\boldsymbol{u}_{AB}||\boldsymbol{u}_p|} = \frac{|6|}{\sqrt{17}\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = 49°24'$$

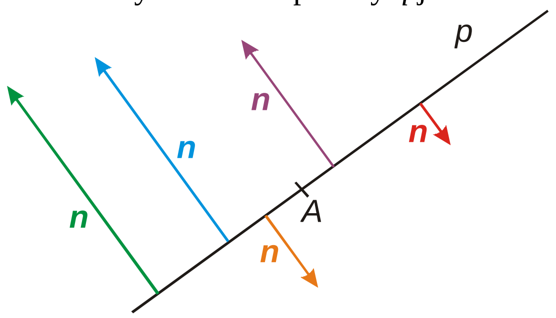
Odchylka přímek AB a p je $\varphi = 49°24'$.

Př. 5: Je dána přímka $p: x-3y-2=0$. Najdi přímku q, která prochází bodem $Q[1;1]$, jejíž odchylka od přímky p je $45°$.

Odchylku přímek určují směrové nebo normálové vektory.

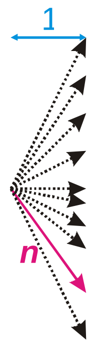
$\boldsymbol{n}_p = (1;-3) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_p| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

Normálových vektorů přímky q je nekonečně mnoho:



$\Rightarrow$ musíme si vybrat, který z nich chceme spočítat, abychom získali jednoznačný výsledek.

Hledáme například takový, který má x-ovou souřadnici rovnou jedné (pokud nejsou normálové vektory svislé $\boldsymbol{n} = (0;k)$ určitě je jeden z vektorů s x-ovou souřadnicí rovnou jedné normálovým vektorem přímky p).



$\Rightarrow$ Volíme: $\boldsymbol{n}_q = (1;y) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_q| = \sqrt{1^2+y^2}$.

$\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{n}_q = (1;-3)\cdot(1;y) = 1-3y$

$\cos\varphi = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{n}_q|}{|\boldsymbol{n}_p||\boldsymbol{n}_q|} = \frac{|1-3y|}{\sqrt{10}\sqrt{1+y^2}}$ (Zde je dobře vidět, že kdybychom si nezvolili hodnotu x-ové souřadnice, nemohli bychom příklad vyřešit, protože bychom měli pouze jedinou rovnici na určení dvou neznámých.)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1-3y|}{\sqrt{10}\sqrt{1+y^2}}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{10}\sqrt{1+y^2} = 2|1-3y|$$

$$2\sqrt{5}\sqrt{1+y^2} = 2|1-3y|$$

$\sqrt{5(1+y^2)} = |1-3y| \quad /^2$ (Umocněním se zbavíme odmocniny i absolutní hodnoty.)

$$5(1+y^2) = (1-3y)^2$$

$$5+5y^2 = 1-6y+9y^2$$

$4y^2 - 6y - 4 = 0$

$2y^2 - 3y - 2 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$y_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{n}_{q1} = (1;2)$$

$$y_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{n}_{q2} = (1;-0,5) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{q2} = (2;-1)$$

$\Rightarrow$ Existují dvě přímky, které splňují zadání.

q_1:

$\boldsymbol{n}_{q1} = (1;2) \ \Rightarrow\ x + 2y + c = 0$

Dosadíme $Q[1;1] \ \Rightarrow\ 1 + 2 \cdot 1 + c = 0 \ \Rightarrow$ $c = -3$.

$q_1: x + 2y - 3 = 0$

q_2:

$\boldsymbol{n}_{q2} = (2;-1) \ \Rightarrow\ 2x - y + c = 0$

Dosadíme $Q[1;1] \ \Rightarrow\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + c = 0 \ \Rightarrow$ $c = -1$.

$q_2: 2x - y - 1 = 0$

Zadání příkladu splňují přímky $q_1: x + 2y - 3 = 0$ a $q_2: 2x - y - 1 = 0$.

Pedagogická poznámka: Diskuse o zvolení jedné souřadnice normálového vektoru $\boldsymbol{n}_q = (1; y)$ je důležitá. Podobných případů, kdy musíme spočítat něco nejednoznačného (například směrové vektory) je mnoho a je dobré, když studenti chápou důvod, proč je nutné souřadnici zvolit.

Dodatek: Můžeme si ukázat, jak by řešení příkladu probíhalo, kdybychom si vybrali jiný směrový vektor:

Volíme: $\boldsymbol{n}_q = (2; y) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_q| = \sqrt{2^2 + y^2}$, $\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (1;-3) \cdot (2; y) = 2 - 3y$

$$\cos\varphi = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q|}{|\boldsymbol{n}_p||\boldsymbol{n}_q|} = \frac{|2-3y|}{\sqrt{10}\sqrt{4+y^2}}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{10}\sqrt{4+y^2} = 2|2-3y|$$

$$5(4+y^2) = (2-3y)^2 \ \Rightarrow\ 20 + 5y^2 = 4 - 12y + 9y^2 \ \Rightarrow\ 4y^2 - 12y - 16 = 0$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \ \Rightarrow\ (y-4)(y+1) = 0 \ \Rightarrow$$

$y_1 = 4$, $\boldsymbol{n}_{q1} = (1;2)$ nebo $y_2 = -1$, $\boldsymbol{n}_{q2} = (2;-1)$

Můžeme také zvolit y-ovou souřadnici a dopočítat x-ovou:

$\boldsymbol{n}_q = (x;1) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_q| = \sqrt{x^2 + 1^2}$, $\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (1;-3) \cdot (x;1) = x - 3$

$$\cos\varphi = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q|}{|\boldsymbol{n}_p||\boldsymbol{n}_q|} = \frac{|x-3|}{\sqrt{10}\sqrt{x^2+1^2}}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{10}\sqrt{x^2+1^2} = 2|x-3|$$

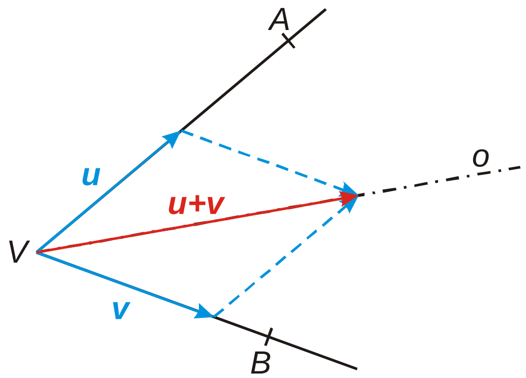
$$5(x^2+1^2) = (x-3)^2 \ \Rightarrow\ 5x^2 + 5 = x^2 - 6x + 9 \ \Rightarrow\ 4x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \ \Rightarrow\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \ \Rightarrow$$

$x_1 = -2$, $\boldsymbol{n}_{q1} = (-2;1)$ (stejný směr jako vektor $\boldsymbol{n}_{q2} = (2;-1)$)

$x_2 = -\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{n}_{q2} = (0,5;1) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{q2} = (1;2)$

Př. 6: Jsou dány body $A[1;3]$, $B[-4;-1]$ a $V[-3;1]$. Najdi obecnou rovnici osy úhlu *AVB*.



Osa úhlu = „průměr směrů obou ramen“ $\Rightarrow$ určíme vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ tak, aby platilo:

$\boldsymbol{u} = k(A-V)$, $k > 0$ $\quad$ $\boldsymbol{v} = l(B-V)$, $l > 0$ $\quad$ $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|$.

Vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ pak bude mít směr osy úhlu *AVB*.

- $A - V = (4;2)$, $|A-V| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$
- $B - V = (-1;-2)$, $|B-V| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Vektor $A-V$ je dvakrát větší $\Rightarrow$ zmenšíme ho na polovinu.

$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(A-V) = \frac{1}{2}(4;2) = (2;1)$

$\boldsymbol{v} = 1(B-V) = (-1;-2)$

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (2;1) + (-1;-2) = (1;-1) = \boldsymbol{u}_o$

$\boldsymbol{n}_o = (1;1) \Rightarrow$ rovnice $x + y + c = 0$

Dosadíme bod $V[-3;1]$: $-3 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = 2$.

Osa úhlu *AVB* má obecnou rovnici: $x + y + 2 = 0$.

Př. 7: Petáková:
strana 108/cvičení 47 e) g)
strana 108/cvičení 48 a) b)
strana 108/cvičení 50
strana 108/cvičení 52
strana 110/cvičení 77

Shrnutí: Výpočet odchylky přímek je založen na určení odchylky směrových vektorů. Hodnoty jsou menší než $90°$.