7.3.16 Další metrické úlohy II

Předpoklady: 7315

Př. 1: Najdi přímku rovnoběžnou s osou I a III kvadrantu vzdálenou od bodu $A[-1;2]$ $2\sqrt{2}$.

Osou I a III kvadrantu je přímka $y = x$ $\Rightarrow$ přímky s ní rovnoběžné mají rovnici $x - y + c = 0$.

Vzdálenost přímky od bodu $A[-1;2]$: $\frac{|-1-(-2)+c|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$.

$\frac{|1+c|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \qquad / \cdot \sqrt{2}$

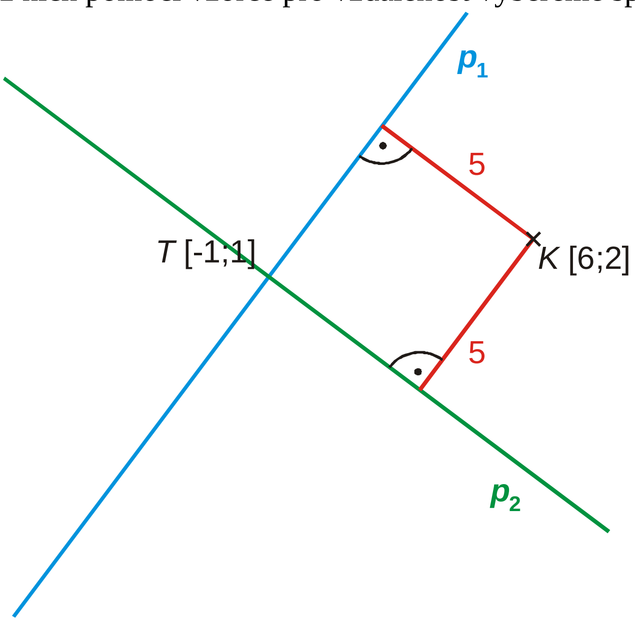
$|c+1| = |c-(-1)| = 4$ $\Rightarrow$ Hledáme čísla, jejichž obraz na číselné ose od obrazu čísla (-1) vzdálený 4 $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $c_1 = 3$ $\Rightarrow$ přímka $x - y + 3 = 0$,
- $c_2 = -5$ $\Rightarrow$ přímka $x - y - 5 = 0$.

Podmínky zadání splňují přímky $x - y + 3 = 0$ a $x - y - 5 = 0$.

Př. 2: Které z přímek, procházejících bodem $T[-1;1]$ mají od bodu $K[6;2]$ vzdálenost 5?

Problém: Hledáme přímku, známe jeden její bod $\Rightarrow$ musíme určit její směr.
Správnou přímku najdeme pomocí její vzdálenosti od bodu K $\Rightarrow$ potřebujeme její obecnou rovnici, abychom mohli použít vzorec $\Rightarrow$ napíšeme všechny přímky procházející bodem T a z nich pomocí vzorce pro vzdálenost vybereme správné hodnoty parametru



$\Rightarrow$ Z obrázku je zřejmé, že můžeme očekávat dvě řešení.
Rovnice přímky, u které známe bod a neznáme směr $\Rightarrow$ směrnicový tvar $(y - y_0) = k(x - x_0)$.

Dosadíme bod $T[-1;1] \Rightarrow (y-1)=k(x-[-1])$ (nezapsali jsme přímku $x=-1$).

Převedeme na obecnou rovnici: $y-1=kx+k \Rightarrow kx-y+k+1=0$.

Vzorec pro vzdálenost bodu od přímky: $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=d=5$.

Dosadíme přímku $kx-y+k+1=0$: $\frac{|kx-y+k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=5$.

Určujeme vzdálenost od bodu $K[6;2]$: $\frac{|k\cdot 6-2+k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=5$.

$$\frac{|6k-2+k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=5$$

$$\frac{|7k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=5 \quad /^2$$

$$\frac{49k^2-14k+1}{k^2+1}=25 \quad /\left(k^2+1\right)$$

$$49k^2-14k+1=25\left(k^2+1\right)$$

$$24k^2-14k-24=0$$

$$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 24\cdot(-24)}}{2\cdot 24}=\frac{14\pm\sqrt{2500}}{48}=\frac{14\pm 50}{48}$$

$$k_1=\frac{14+50}{48}=\frac{64}{48}=\frac{4}{3} \qquad k_2=\frac{14-50}{48}=\frac{-36}{48}=-\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ Získali jsme dva kořeny (očekávali jsme dvě řešení) $\Rightarrow$ nemusíme prověřovat přímku $x=-1$. Hledané přímky:

$$p_1:(y-1)=\frac{4}{3}(x+1) \qquad p_2:(y-1)=-\frac{3}{4}(x+1)$$

$$3y-3=4x+4 \qquad 4y-4=-3x-3$$

$$p_1:4x-3y+7=0 \qquad p_2:3x+4y-1=0$$

Vzdálenost 5 mají z přímek procházejících bodem $T[-1;1]$ od bodu $K[6;2]$ přímky $p_1:4x-3y+7=0$, $p_2:3x+4y-1=0$.

Pedagogická poznámka: Příklad je důležitý. Využívá typicky analytický postup se zapsáním útvaru pomocí parametru. Je jasné, že studenti budou potřebovat pomoc při návrhu řešení. Je nutné dávat pozor při dosazování do vzorce pro vzdálenost. Značná část studentů bude mít problémy s orientací v písmenkách.

Př. 3: Jsou dány body $A[-3;1], B[5;-3]; C[4;1]; D[0;3]$.
a) Dokaž, že body *A*, *B*, *C*, *D* určují lichoběžník.
b) Vypočti velikost úhlu α.
c) Urči výšku lichoběžníku.

a) Dokaž, že body *A*, *B*, *C*, *D* určují lichoběžník.

Lichoběžník má alespoň dvě rovnoběžné strany $\Rightarrow$ alespoň jedna dvojice vektorů, které určují protější strany musí být navzájem rovnoběžná (navzájem svými násobky).

$B-A=(8;-4)$ $\quad C-D=(4;-2)$

$\Rightarrow$ platí $(B-A)=2(C-D)$ $\Rightarrow$ strany *AB* a *CD* jsou rovnoběžné.

$D-A=(3;2)$ $\quad C-B=(-1;4)$

$\Rightarrow$ neplatí $(D-A)=k(C-B)$ $\Rightarrow$ strany *AD* a *BC* nejsou rovnoběžné.

Body *A*, *B*, *C*, *D* určují lichoběžník se základnami *AB* a *CD*.

b) Vypočti velikost úhlu α.

Úhel α je úhel mezi vektory $D-A$ a $B-A$

$B-A=(8;-4)$ $\Rightarrow$ Použijeme zkrácený tvar: $\boldsymbol{u}=(2;-1)$, $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

$D-A=(3;2)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}=(3;2)$, $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\frac{(2;-1)(3;2)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\frac{6-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}\Rightarrow\alpha=60°15'$$

Úhel α má velikost $60°15'$.

c) Urči výšku lichoběžníku.

Výška lichoběžníku se rovná vzdálenosti jeho základen, tedy například vzdálenosti bodu *D* od přímky *AB*.

Obecná rovnice přímky *AB*: $B-A=(8;-4)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}=(2;-1)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}=(1;2)$.

Rovnice $x+2y+c=0$, dosadíme bod $A[-3;1]$: $-3+2\cdot1+c=0\Rightarrow c=1$.

Vzdálenost bodu $D[0;3]$ od přímky $x+2y+1=0$: $\frac{|0+2\cdot3+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Výška lichoběžníku *ABCD* je $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Př. 4: Je dán ostroúhlý trojúhelník *ABC*, $c=7\,\text{cm}$, $b=5\,\text{cm}$, $v_c=4\,\text{cm}$. Urči výšku v_b.

Výšku v_b určíme pomocí analytické geometrie snadno, ale musíme znát souřadnice vrcholů $\Rightarrow$ nejdříve určíme souřadnice vrcholů a s jejich pomocí pak požadovanou výšku v_b.

Umístění trojúhelníku si můžeme zvolit $\Rightarrow$ hledáme co nejjednodušší řešení:

- bod *A* umístíme do počátku soustavy souřadnic $\Rightarrow$ $A[0;0]$,
- stranu *c* umístíme na osu *x* $\Rightarrow$ $B[7;0]$.

V trojúhelníku platí $v_c=4\,\text{cm}$ $\Rightarrow$ bod *C* musí ležet na přímce rovnoběžné s osou *x*, vzdálené od ní 4 cm $\Rightarrow$ bod *C* leží na přímce $y=4$ $\Rightarrow$ souřadnice bodu $C[c;4]$.

Poslední známá vlastnost trojúhelníka *ABC*: $b=|AC|=5\,\text{cm}$.

$\sqrt{(c-0)^2+(4-0)^2}=5$

$c^2+16=25$

$c^2=9$ $\Rightarrow$ dvě řešení:

$c_1=-3$ - nevyhovuje zadání, úhel BAC by byl určitě tupý.

$c_2=3$ $\Rightarrow$ $C[3;4]$

Výška v_b je rovna vzdálenosti bodu *B* od přímky *AC*.

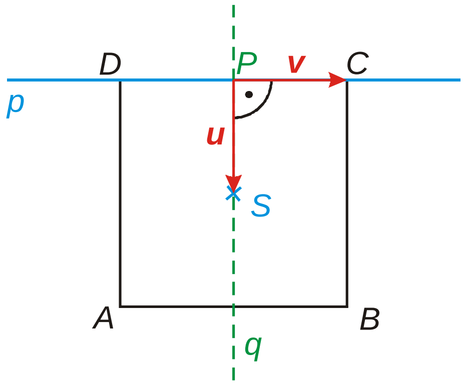
Obecná rovnice přímky *AC*: $C-A=(3;4) \Rightarrow \boldsymbol{n}=(4;-3) \Rightarrow$ rovnice $3x-4y+c=0$,

bod $A[0;0] \Rightarrow c=0 \Rightarrow$ rovnice $3x-4y=0$.

Vzdálenost bodu $B[7;0]$ od přímky $3x-4y=0$: $\dfrac{|3\cdot 7-4\cdot 0|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{21}{5}$

V trojúhelníku *ABC* platí, že $v_b=\dfrac{21}{5}\text{cm}$.

Př. 5: Urči vrcholy čtverce pokud znáš souřadnice středu čtverce $S[-1;0]$ a rovnici přímky $p: x-2y+6=0$, na které leží strana *CD*.



Z obrázku je vidět, že:

- jako průsečík přímky *p* a přímky *q* (kolmice na přímku *p* procházející bodem *S*) najdeme bod *P* (střed strany *DC*),
- pomocí bodu *P* určíme vektor $\boldsymbol{u}$,
- vektor $\boldsymbol{v}$ určíme jako vektor kolmý na $\boldsymbol{u}$ o stejné velikosti,
- pomocí vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ dopočteme posunutím vrcholy čtverce.

Přímka *q*: $\boldsymbol{u}_q=\boldsymbol{n}_p=(1;-2)$, bod $S[-1;0] \Rightarrow q: \begin{array}{l} x=-1+t \\ y=-2t, t\in R \end{array}$

Hledáme průsečík přímek *p* a *q* $\Rightarrow$ soustava rovnic: $\begin{array}{l} x-2y+6=0 \\ x=-1+t \\ y=-2t \end{array}$.

Dosadíme do první rovnice: $-1+t-2(-2t)+6=0$.

$5t+5=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow$ souřadnice bodu P: $\begin{array}{l} x=-1+t=-1-1=-2 \\ y=-2t=-2(-1)=2 \end{array} \Rightarrow P[-2;2]$.

Výpočet vektorů: $\boldsymbol{u}=S-P=(1;-2)$, $\boldsymbol{v}=(2;1)$.

Výpočet vrcholů: $C=P+\boldsymbol{v}=[-2;2]+(2;1)=[0;3]$

$D=P-\boldsymbol{v}=[-2;2]-(2;1)=[-4;1]$

$A=D+2\boldsymbol{u}=[-4;1]+2(1;-2)=[-2;-3]$

$B=C+2\boldsymbol{u}=[0;3]+2(1;-2)=[2;-1]$

Čtverec *ABCD* má vrcholy v bodech $A[-2;-3]$, $B[2;-1]$, $C[0;3]$, $D[-4;1]$.

Př. 6: Najdi vrcholy obdélníku *ABCD*, pokud znáš souřadnice bodů $A[0;-2]$, $C[6;6]$ a rovnici přímky $p: x-3y-12=0$, na které leží bod *B*.

Hledáme souřadnice bodu $B[x;y] \Rightarrow$ potřebujeme najít dvě rovnice.

1. rovnice: Bod *B* leží na přímce $p: x-3y-12=0$.

2. rovnice: Strany obdélníku jsou na sebe kolmé $\Rightarrow$ vektory $B-A$ a $B-C$ jsou na sebe kolmé $\Rightarrow$ skalární součin je nulový: $(B-A)\cdot(B-C)=0$.

$B-A=(x-0;y+2)$ $\qquad$ $B-C=(x-6;y-6)$

$(B-A)\cdot(B-C)=(x;y+2)\cdot(x-6;y-6)=0$

$x^2-6x+y^2-6y+2y-12=0$

$x^2-6x+y^2-4y-12=0$. Dosadíme z první rovnice: $x-3y-12=0 \Rightarrow x=3y+12$.

$(3y+12)^2-6(3y+12)+y^2-4y-12=0$

$9y^2+72y+144-18y-72+y^2-4y-12=0$

$10y^2+50y+60=0 \quad /:10$

$y^2+5y+6=(y+3)(y+2)=0 \ \Rightarrow$ dvě řešení:

$y_1=-3$ $\qquad$ $y_2=-2$

$x_1=3y+12=3\cdot(-3)+12=3 \ \Rightarrow \ B_1[3;-3]$ $\qquad$ $x_2=3y+12=3\cdot(-2)+12=6 \ \Rightarrow \ B_2[6;-2]$

$D_1=C+(A-B_1)=[6;6]+(-3;1)=[3;7]$ $\qquad$ $D_2=C+(A-B_2)=[6;6]+(-6;0)=[0;6]$

Hledanými vrcholy obdélníka jsou body $B_1[3;-3]$, $D_1[3;7]$ nebo $B_2[6;-2]$, $D_2[0;6]$.

Př. 7: Petáková:
strana 111 cvičení 103
strana 111 cvičení 110
strana 112 cvičení 117
strana 112 cvičení 119
strana 112 cvičení 124

Shrnutí: