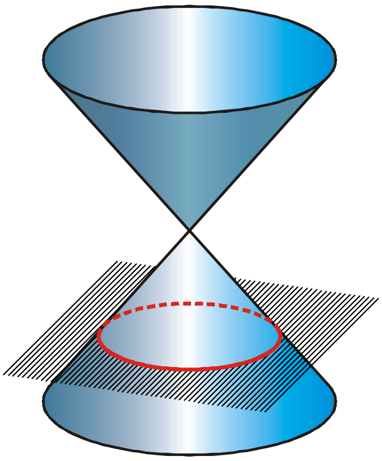
7.5.1 Středová a obecná rovnice kružnice

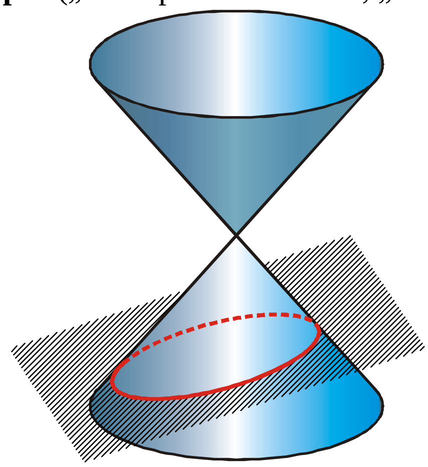
Př. 1: Sepiš všechny kuželosečky, které znáš. Načrtni polohu, ve které sečná rovina seče kuželovou plochu, aby vznikla daná kuželosečka.

Kružnice



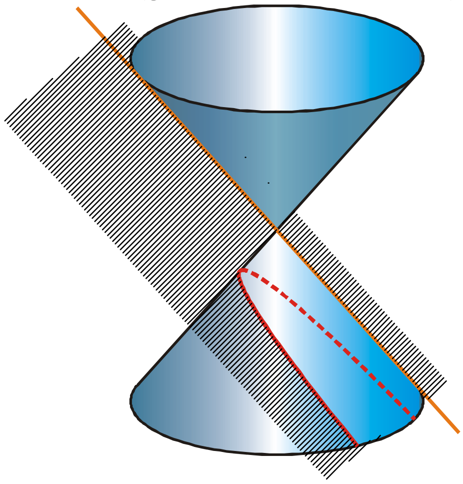
Sečná rovina je kolmá k ose kuželové plochy.

Elipsa („rozšlápnutá kružnice“, „ovál“)



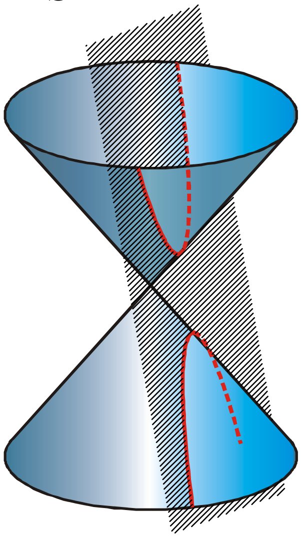
Sečná rovina není kolmá na osu, ale svírá s ní větší úhel než strana kuželové plochy.

Parabola (graf kvadratické funkce)



Sečná rovina je rovnoběžná se stranou kuželové plochy

Hyperbola (graf lineární lomené funkce)



Sečná rovina svírá s osou kuželové plochy menší úhel než strana.

Př. 2: Najdi rovnici kružnice se středem $S[2;3]$ a poloměrem $r=2$. Body kružnice zapiš jako $X[x;y]$. Příklad řeš dvakrát do dvou sloupců, v levém sloupci pro zadané hodnoty, v pravé obecně pro $S[m;n]$ a r.

$|XS|=2 \quad \sqrt{(x-s_x)^2+(y-s_y)^2}=2$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=2 \quad /^2$

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

$|XS|=r \quad \sqrt{(x-s_x)^2+(y-s_y)^2}=r$

$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}=r \quad /^2$

$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

Př. 3: Najdi středový tvar rovnice kružnice $k(S;r)$, pokud platí:

a) $S[4;-1]$, $r=1$ b) $S[-1;-2]$, $r=-2$ c) $S[-1;0]$, $r=0,5$

a) $S[4;-1]$, $r=1 \Rightarrow (x-4)^2+(y-[-1])^2=1^2 \qquad (x-4)^2+(y+1)^2=1$

b) $S[-1;-2]$, $r=-2 \Rightarrow$ Rovnici nejde sestavit, kružnice nemůže mít záporný poloměr.

c) $S[-1;0]$, $r=0{,}5 \Rightarrow \left(x-[-1]\right)^2+(y-0)^2=0{,}5^2$ $\qquad (x+1)^2+y^2=0{,}25$

Př. 4: Urči střed a poloměr kružnice $k(S;r)$, pokud je dána středovou rovnicí:

a) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ $\qquad$ b) $(x+1)^2+(y-4)^2=-2$

c) $x^2+y^2=\sqrt{3}$ $\qquad$ d) $(x+2)^2-(y-1)^2=4$

a) $(x-2)^2+(y+3)^2=9 \Rightarrow S[2;-3]$, $r=\sqrt{9}=3$

b) $(x+1)^2+(y-4)^2=-2 \Rightarrow$ Nejde o rovnici kružnice, protože $\sqrt{-2}$ nemůže být poloměr.

c) $x^2+y^2=\sqrt{3} \Rightarrow S[0;0]$, $r=\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$

d) $(x+2)^2-(y-1)^2=4 \Rightarrow$ Nejde o rovnici kružnice mezi závorkami není plus.

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$ $\qquad x^2+y^2-4x-6y+9=0$ - **obecná rovnice kružnice**

Př. 5: Najdi obecnou rovnici kružnice, která je dána středovou rovnicí $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.

$x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$

Př. 6: Najdi střed a poloměr kružnice dané obecnou rovnicí $x^2+y^2+4x-8y-5=0$.

$(x+2)^2+(y-4)^2=25 \Rightarrow$ Kružnice má střed v bodě $S[-2;4]$ a poloměr $r=\sqrt{25}=5$.

Př. 7: Urči středy a poloměry kružnic, které jsou dány následujícími rovnicemi:

a) $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ $\qquad$ b) $x^2+y^2-4x-4=0$

c) $x^2+y^2-4x-6y+20=0$ $\qquad$ d) $x^2+y^2-3x-4y=0$

e) $x^2-\frac{1}{2}x+y^2-8y+13=0$

a) $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ $\quad (x-1)^2+(y+3)^2=4 \Rightarrow S[1;-3]$, $r=\sqrt{4}=2$.

b) $x^2+y^2-4x-4=0$ $\quad (x-2)^2+y^2=8 \Rightarrow S[2;0]$, $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

c) $x^2+y^2-4x-6y+20=0$ $\quad (x-2)^2+(y-3)^2=-7 \Rightarrow$ Nejde o rovnici kružnice

d) $x^2+y^2-3x-4y=0$ $\quad \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4} \Rightarrow S\left[\frac{3}{2};2\right]$, $r=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$.

e) $x^2-\frac{1}{2}x+y^2-8y+13=0$ $\quad \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2=\frac{49}{16} \Rightarrow S\left[\frac{1}{4};4\right]$, $r=\sqrt{\frac{49}{16}}=\frac{7}{4}$.

Př. 8: Rozhodni o pravdivosti následujících vět:
a) Každou kružnici je možné zapsat pomocí obecné rovnice kružnice.
b) Každá rovnice tvaru $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$ (všechny koeficienty jsou reálná čísla) je obecnou rovnicí kružnice.

Př. 9: (BONUS): Najdi podmínku, kterou musí splňovat parametry *m*, *n*, *p*, aby rovnice $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$ byla obecnou rovnicí kružnice.

$(x-m)^2+(y-n)^2=m^2+n^2-p$ $\qquad \Rightarrow$ musí platit $m^2+n^2-p>0$.

Př. 10: Petáková:
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)