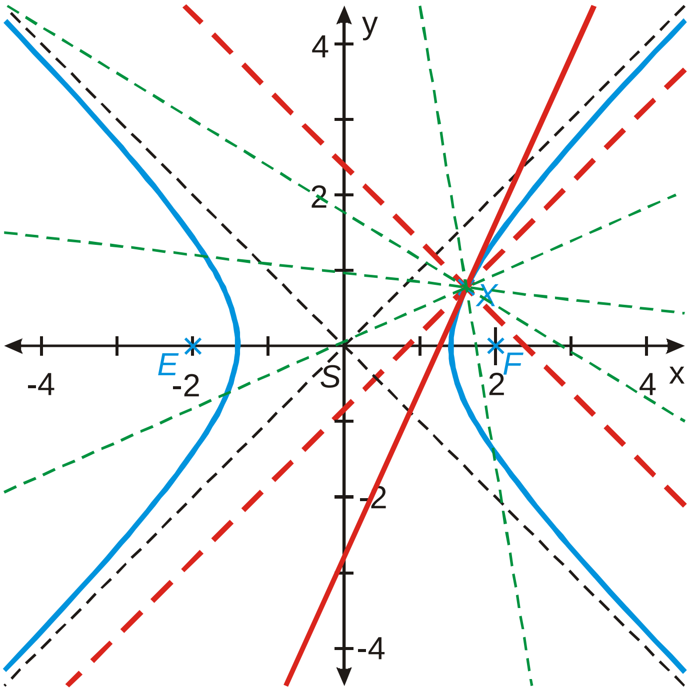
7.5.20 Hyperbola a přímka

Př. 1: Je dána hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ a bod $T[x;y]$, který na ní leží. Jaké mohou nastat vzájemné polohy hyperboly a přímky procházející bodem T?



Př. 2: Napiš rovnici tečny hyperboly v jejím daném bodě:

a) $(x-2)^2-\frac{(y+1)^2}{3}=1$, $T[4;2]$

b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, $T\left[\frac{25}{4};-3\right]$

a) $(x_0-2)(x-2)-\frac{(y_0+1)(y+1)}{3}=1$ $\quad(4-2)(x-2)-\frac{(2+1)(y+1)}{3}=1$

$2(x-2)-\frac{3(y+1)}{3}=1$ $\quad 2x-4-(y+1)=1$ $\quad 2x-y-6=0$

b) $\frac{x_0x}{25}-\frac{y_0y}{16}=1$. $\quad \frac{\frac{25}{4}x}{25}-\frac{(-3)y}{16}=1$ $\quad \frac{x}{4}+\frac{3y}{16}=1 \quad /\cdot 16$ $\quad 4x+3y-16=0$

Př. 3: Urči vzájemnou polohu přímky $5x-4y+9=0$ a hyperboly $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$.

$5x-4y+9=0 \Rightarrow y=\frac{5x+9}{4}$ $\quad 16\left(\frac{25x^2+90x+81}{16}\right)-25x^2=400$

$25x^2+90x+81-25x^2=400$ $\quad 90x=319$ $\quad x=\frac{319}{90}$

$\left(\frac{y}{5}\right)^2-\left(\frac{x}{4}\right)^2=\left(\frac{y}{5}-\frac{x}{4}\right)\left(\frac{y}{5}+\frac{x}{4}\right)=0$. $\quad \frac{y}{5}=\frac{x}{4}\Rightarrow 4y+5x=0$ $\quad \frac{y}{5}=-\frac{x}{4}\Rightarrow 4y-5x=0$

Přímka $5x-4y+9=0$ je přímkou rovnoběžnou s její asymptotou.

Př. 4: Najdi přímku rovnoběžnou s přímkou $4x+y+1=0$, která je tečnou hyperboly $4x^2-y^2-12=0$.

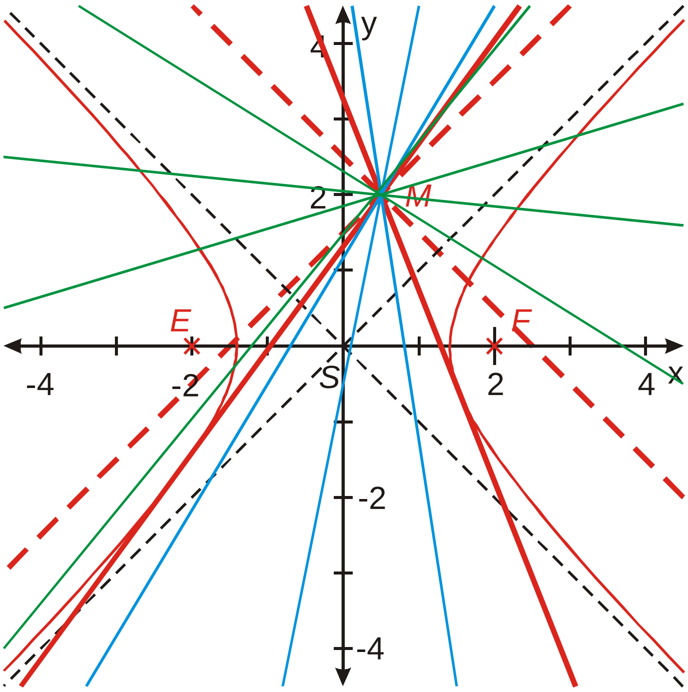
$4x+y+c=0 \Rightarrow y=-4x-c$ dosadíme do rovnice hyperboly: $4x^2-y^2=12$.

$4x^2-(-4x-c)^2=12 \qquad 4x^2-(16x^2+8cx+c^2)=12 \qquad 4x^2-16x^2-8cx-c^2=12$

$12x^2+8cx+c^2+12=0 \quad D=b^2-4ac=(8c)^2-4\cdot 12\cdot(c^2+12)=64c^2-48c^2-4\cdot 12^2=0$

$16c^2-4\cdot 4\cdot 4\cdot 3^2=0 \quad /:16 \qquad c^2-6^2=0 \qquad (c-6)(c+6)=0 \Rightarrow$ dva kořeny $c_1=6$, $c_2=-6$

Př. 5: Je dána hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ a bod $M[x;y]$, který na ní neleží. Jaké mohou nastat vzájemné polohy hyperboly a přímky procházející bodem *M*?



Př. 6: Najdi všechny tečny hyperboly $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$, které procházejí bodem $M[3;-6]$.

Přímky bodem $M[3;-6]$: $(y-y_0)=k(x-x_0)$ po dosazení: $(y+6)=k(x-3)$.

$y=kx-3k-6$. Hyperboly: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1 \quad /\cdot 9$. $\qquad x^2-y^2=9$

$x^2-(kx-3k-6)^2=9 \quad x^2-[k^2x^2-3k^2x-6kx-3k^2x+9k^2+18k-6kx+18k+36]=9$

$x^2(1-k^2)+6k^2x+12kx-9k^2-36k-45=0 \quad x^2(1-k^2)+(6k^2+12k)x-9k^2-36k-45=0$

- $k=1$: $(y+6)=1(x-3) \Rightarrow y=x-9$ - rovnoběžka s asymptotou
- $k=-1$: $(y+6)=-1(x-3) \Rightarrow y=-x-3$ - rovnoběžka s asymptotou

$k\neq\pm 1 \Rightarrow D=b^2-4ac=(6k^2+12)^2-4(1-k^2)(-9k^2-36k-45)=0$

$36(k^2+2k)^2+4\cdot 9(1-k^2)(k^2+4k+5)=0 \quad /:36 \quad (k^2+2k)^2+(1-k^2)(k^2+4k+5)=0$

$k^4+4k^3+4k^2+[k^2+4k+5-k^4-4k^3-5k^2]=0$

$k^4+4k^3+4k^2+k^2+4k+5-k^4-4k^3-5k^2=0 \qquad 4k+5=0$

$k=-\frac{5}{4} \Rightarrow (y+6)=-\frac{5}{4}(x-3) \quad /\cdot 4. \quad 4y+24=-5x+15 \qquad 5x+4y+9=0$

$x=3$: $x^2-y^2=3^2-y^2=9 \Rightarrow y^2=0 \Rightarrow$ přímka $x=3$ se dotýká paraboly v jejím vrcholu.

Hyperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ $M[3;-6]$: $x=3$ a $5x+4y+9=0$.

Př. 7: Petáková:
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)