

8.2.10 Příklady z finanční matematiky I

Předpoklady: 8207

Finanční matematika se zabývá ukládáním a půjčováním peněz, pojišťováním, odhady rizik apod. Poměrně důležitá a výnosná disciplína.

Spoření

Při spoření vkladatel uloží do banky své peníze (fakticky své peníze bance půjčí). Banka s takto získanými penězi podniká a za vypůjčení vkladateli platí tím, že mu vrátí více peněz než si půjčil (úrok).

Důležité termíny:

jistina – vložená částka, není majetkem banky stále zůstává majetkem vkladatele

úrok – částka, kterou banka platí vkladateli za to, že si u ní peníze uložil (za to, že je bance půjčil), většinou se udává v procentech vložené částky

roční úroková míra – částka v procentech udávající velikost úroku za uložení peněz na jeden rok. Při roční úrokové míře 3% zaplatí banka vkladateli za uložení 100 000 Kč po dobu jednoho roku 3000 Kč. Pokud si tento vkladatel své peníze po roce vybere z banky dostane místo vložených 100 000 Kč 103 000 Kč.

úrokovací období – doba, po které banka vypočte a připíše vkladateli úroky. Obvykle se úrokuje po jednom roce, ale časté je i měsíční nebo dokonce denní (na běžných účtech) úrokování.

úrokovací doba – doba, po kterou vkladatel bance peníze půjčuje

výpovědní lhůta – protože banka půjčené peníze investuje, potřebuje dopředu vědět, kdy bude muset peníze vrátit. Proto musí vkladatel ve většině případů dopředu oznámit, kdy bude peníze vybírat. Tato doba se nazývá výpovědní lhůta. Pokud potřebuje v nutném případě vkladatel peníze vybrat dříve, musí bance zaplatit pokutu. V případě vkladů s delší výpovědní lhůtou (například dva roky) je běžné, že vkladatel vypoví vklad ihned při jeho vložení.

daň z příjmu – příjmy z úroků patří mezi příjmy, ze kterých se platí daň. V tomto okamžiku v jednotné výši 15%.

Př. 1: Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3%. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden rok? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka nepřipisuje ke vkladu, ale posílá je Pavlovi na jeho běžný účet. Urči jeho majetek vždy na konci roku.

Úrok, který zaplatí banka za 1 rok: $50000 \cdot 0,03 = 1500$ Kč

Úrok po zdanění: $50000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 1275$ Kč

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých roků:

po 1. roce: $50000 + 50000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 51275$ Kč

po 2. roce: $50000 + 2 \cdot 50000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 52550$ Kč (banka mu poslala úroky dvakrát)

po 3. roce: $50000 + 3 \cdot 50000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 53825$ Kč (banka mu poslala úroky třikrát)

po 4. roce: $50000 + 4 \cdot 50000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 55100$ Kč (banka mu poslala úroky čtyřikrát)

po 5. roce: $50000 + 5 \cdot 50000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 56375$ Kč (banka mu poslala úroky pětikrát)

Předchozí příklad je nejjednodušším příkladem **jednoduchého úrokování**. Při jednoduchém úrokování se úrok nepřidává k vložené částce a banko ho neúročí.

Chování vkladatele v předchozím příkladě, příkladem rentiérského chování = vložíme do banky určitou částku a žijeme v úrocích.

Př. 2: Jakou částku by bylo nutné uložit v bance na úrok 3%, aby roční úrok dosáhl 120000 Kč (tedy 10 000 Kč na měsíc)?

Nutná částka ... x
roční úrok ... $x \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 120000$

$$x = \frac{120000}{0,03 \cdot 0,85} = 4705882 \text{ Kč}$$

Pokud chceme, aby nám banka vyplácela každý měsíc 10 000 Kč na úrocích musíme mít na 3% úrok uloženo přibližně 4,7 miliónu korun.

Pedagogická poznámka: Následující příklad většinou nepočítáme. Jenom nechám studenty, aby si ho prohlédli. Bavíme se o výpočtu úroku za 1 měsíc.

Př. 3: Pavel uložil 50 000 Kč u konkurenční banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3%. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden měsíc? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka nepřipisuje ke vkladu, ale posílá je Pavlovi na jeho běžný účet. Urči jeho majetek po pěti letech spoření.

Úrok, který zaplatí banka za 1 měsíc: $50000 \cdot \frac{0,03}{12} = 125 \text{ Kč}$ (3% je roční úroková míra, měsíc je jedna dvanáctina roku)

Úrok po zdanění: $50000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 106,25 \text{ Kč}$

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých měsíců:

po 1. měsíci: $50000 + 50000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 50106,25 \text{ Kč}$

po 2. měsíci: $50000 + 2 \cdot 50000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 50212,5 \text{ Kč}$ (banka mu poslala úroky dvakrát)

po 3. měsíci: $50000 + 3 \cdot 50000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 50318,75 \text{ Kč}$ (banka mu poslala úroky třikrát)

po n měsíci: $50000 + n \cdot 50000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \text{ Kč}$ (banka mu poslala úroky n -krát)

Spočteme si ušetřené částky po zajímavém období:

po 12 měsíci: $50000 + n \cdot 50000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 51275 \text{ Kč}$

po 60 měsíci: $50000 + n \cdot 50000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 56375 \text{ Kč}$

Jak je vidět při jednoduchém úrokování nezáleží na délce úrokovacího období.

Jednoduché úrokování na účtech není příliš časté. Častěji se používá **složené úrokování**, kdy úroky banka přičítá k jistině a v dalším období platí i úroky i z nich.

Př. 4: Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3%. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden rok? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka připisuje ke vkladu. Urči jeho majetek vždy na konci roku.

Úrok, který zaplatí banka za 1 rok: $50000 \cdot 0,03 = 1500$ Kč

Úrok po zdanění: $50000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 1275$ Kč

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých roků:

po 1. roce: $50000 + 50000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 50000(1 + 0,03 \cdot 0,85) = 51275$ Kč

po 2. roce:

všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci roku (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího roku \Rightarrow budou se z nich počítat úroky

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 2 rok: $50000(1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot 0,03 \cdot 0,85$ Kč

Peníze na účtu po 2. roce: $50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)$ - jistina z předchozího roku +
 $50000(1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot 0,03 \cdot 0,85$ - úrok v druhém roce

$$50000(1 + 0,03 \cdot 0,85) + 50000(1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot 0,03 \cdot 0,85 =$$

$$= 50000(1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) = 50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^2$$

po 3. roce:

všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci druhého roku (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího roku \Rightarrow budou se z nich počítat úroky

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 3 rok: $50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^2 \cdot 0,03 \cdot 0,85$ Kč

Peníze na účtu po 3. roce: $50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^2$ - jistina z předchozího roku +
 $50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^2 \cdot 0,03 \cdot 0,85$ - úrok v druhém roce

$$50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^2 + 50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^2 \cdot 0,03 \cdot 0,85 =$$

$$= 50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^2 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) = 50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^3$$

po n -tém roce: $50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^n$ Kč

konkrétně po 5-tém roce: $50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^5 = 56708,50$ Kč

O moc více jsme nevydělali.

Pokud uložíme do banky částku I_0 na n let s roční úrokovou mírou p procent a úrokovacím obdobím 1 rok. Pak po n letech při 15% zdanění uspoříme

$$I = I_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85 \right)^n \text{ Kč.}$$

Př. 5: Jakou částku by Pavel našetřil, kdyby peníze za podmínek z předchozího příkladu (50 000 Kč, roční úroková míra 3%, úrokovací období 1 rok) uložil na 20 let? Jakou částku by ušetřil, kdyby úroková míra stoupla na 4,5% ?

Spoření dvacet let \Rightarrow použijeme stejný vzorec, změníme $n = 20$:

$$I = I_0 \left(1 + \frac{P}{100} \cdot 0,85 \right)^n = 50000 \left(1 + 0,03 \cdot 0,85 \right)^{20} = 82733,80 \text{ Kč}$$

úrok 4,5% \Rightarrow použijeme stejný vzorec, změníme $p = 4,5$

$$I = I_0 \left(1 + \frac{P}{100} \cdot 0,85 \right)^n = 50000 \left(1 + \frac{4,5}{100} \cdot 0,85 \right)^{20} = 105927,50$$

Pokud by Pavel uložil své peníze na 20 let naspořil by 82733,80 Kč, pokud by úrok dosáhl 4,5% ušetřil by za 20 let 105927,50 Kč.

Jak se změní Pavlovo spoření z příkladu 4 příklad pokud úrokovacím obdobím nebude rok, ale jeden měsíc?

Př. 6: Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3%. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden rok? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka připisuje ke vkladu. Urči jeho majetek vždy na konci roku.

Stejný postup jako v předchozím příkladu, ale počítáme po měsících.

$$\text{Úrok, který zaplatí banka za 1 měsíc: } 50000 \cdot \frac{0,03}{12} = 125 \text{ Kč}$$

$$\text{Úrok po zdanění: } 50000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 106,25 \text{ Kč}$$

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých měsíců:

$$\text{po 1. měsíci: } 50000 + 50000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \right) = 50106,25 \text{ Kč}$$

po 2. měsíci:

všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci 1. měsíce (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího měsíce \Rightarrow budou se z nich počítat úroky

$$\text{Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 2 měsíc: } 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \right) \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \text{ Kč}$$

$$\begin{aligned} \text{Peníze na účtu po 2. měsíci: } & 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \right) - \text{jistina z předchozího měsíce} + \\ & 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \right) \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 - \text{úrok v druhém měsíci} \end{aligned}$$

$$50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \right) + 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \right) \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 =$$

$$= 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \right) \cdot \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \right) = 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \right)^2$$

po 3. měsíce:

všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci druhého měsíce (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího měsíce \Rightarrow budou se z nich počítat úroky

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 2 měsíce: $50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85\right)^2 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85$ Kč

Peníze na účtu po 3. měsíci: $50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85\right)^2$ - jistina z předchozího měsíce +
 $50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85\right)^2 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85$ - úrok v druhém měsíci

$$50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85\right)^2 + 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85\right)^2 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 =$$

$$= 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85\right) = 50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85\right)^3$$

po n -tém měsíci: $50000(1 + 0,03 \cdot 0,85)^n$ Kč

konkrétně po 5-tém roce (tedy po 60 měsících): $50000 \left(1 + \frac{0,03}{12} \cdot 0,85\right)^{60} = 56791,60$ Kč

Zisk ze spoření je větší pouze o 83,1 Kč (úroky, které banka také úročí se na Pavlově účtu objevily dříve)

Vzorec pro výpočet naspořené částky při složeném úrokování můžeme používat i v případě, že úrokovací období není jednorocní. Roční procentní úrokovou míru však musíme nahradit procentní úrokovou mírou za dané úrokovací období a počet let počtem úrokovacích období.

Př. 7: Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3%. Úrokovací období vkladu je 1 den (jak je běžné na běžném účtu). Jakou částku našetří Pavel za pět let? Přestupnost některého z roků zanedbej.

Použijeme vzorec $I = I_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85\right)^n$.

$$I_0 = 50000$$

$$p = \frac{3}{365} \quad (3\% \text{ za rok, rozdělím na 365 dní})$$

$$n = 5 \cdot 365 = 1825$$

$$\text{Výpočet } I = I_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85\right)^n = 50000 \left(1 + \frac{3}{100 \cdot 365} \cdot 0,85\right)^{1825} = 56799 \text{ Kč}$$

Částka se proti měsíční úrokové době zvýšila, ale pouze o velmi málo.

Př. 8: Pavel uložil svému synovi při jeho narození 100 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3,5% s půlročním úrokovacím obdobím. Jakou částku bude mít syn k dispozici ve věku 18 let?

Použijeme vzorec $I = I_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85\right)^n$.

$$I_0 = 100000$$

$$p = \frac{3,5}{2} \text{ (3,5\% za rok, rozdělím na 2 půlroky)}$$

$$n = 18 \cdot 2 = 36$$

$$\text{Výpočet } I = I_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85\right)^n = 100000 \left(1 + \frac{3,5}{100 \cdot 2} \cdot 0,85\right)^{36} = 170157,80 \text{ Kč}$$

Pavel našetří synovi k 18 narozeninám 170 157,80 Kč.

Př. 9: Jaký úrok by musela banka poskytovat u úvěru z předchozího příkladu, aby se výsledná našetřená částka rovnala 300 000?

Použijeme předchozí rovnici, výsledná částka je 300000, neznáme procentní sazbu:

$$I = I_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85\right)^n = 100000 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 2} \cdot 0,85\right)^{36} = 300000$$

$$\left(1 + \frac{p}{100 \cdot 2} \cdot 0,85\right)^{36} = \frac{300000}{100000} = 3$$

$$1 + \frac{p}{100 \cdot 2} \cdot 0,85 = \sqrt[36]{3}$$

$$\frac{p}{100 \cdot 2} \cdot 0,85 = \sqrt[36]{3} - 1$$

$$p = \frac{200}{0,85} (\sqrt[36]{3} - 1) = 7,29$$

Abý Pavel za 18 let našetřil 300000 musel by uložit 100 000 na vklad s úrokem 7,29.

Př. 10: Petáková:
strana 71/cvičení 63

Shrnutí: