8.2.11 Příklady z finanční matematiky II

Předpoklady: 8210

Inflace

Peníze nemají v dnešní době žádnou hodnotu samy o sobě, jejich používání reguluje stát, v případě zhroucení ekonomiky se může stát, že svou hodnotu zcela nebo částečně ztratí (měnové krize a měnové reformy).
Proces znehodnocování peněz probíhá téměř neustále (ale pomalu) díky jevu zvanému inflace (znehodnocování peněz).

V době psaní tohoto textu byla meziroční míra inflace 6% $\Rightarrow$ peníze ztratily během uplynulých dvanácti měsíců 6% své hodnoty. Tedy za určitou částku je možné nyní nakoupit o 6% zboží méně než před rokem.
Výpočet míry inflace velmi závisí velmi na tom, u kterého zboží sledujeme ceny a jak výrazně tyto ceny do výsledku započítáváme. Výpočet inflace se provádí v závislosti na „spotřebním koši“ jehož obsah je vděčným námětem sporů uvnitř odborné veřejnosti (například je dlouhodobým sporem zda do inflace započítávat změny cen nemovitostí. V Evropě se to nedělá s odůvodněním, že nákup nemovitosti není spotřeba, ale investice. Fakt, že spotřebitelé musí někde bydlet je trochu opomíjen. Hlavním důvodem tohoto přístupu je podle mnohých ekonomů fakt, že díky této zásadě vychází roční míra inflace v naprosté většině let nižší).
Roční míra inflace je průměrný údaj a faktický dopad zdražování je na různé vrstvy společnosti velmi různý (pokud zdražuje jídlo nebo energie dotýká se to spíš chudších vrstev).

Na druhou stranu není možné nahlížet na inflaci jako zcela záporný jev. Fakt, že peníze pomalu ztrácí hodnotu přispívá k tomu, aby peníze nebyly zbytečně stahovány z oběhu a ukládány doma a jejich vlastníci se je snažili investovat nebo utratit. Naopak vzácné chvíle, kdy je inflace záporná (peníze hodnotu získávají a zboží zlevňuje - deflace) jsou z ekonomického hlediska považovány za velmi nebezpečné (lidé nespoří a neutrácejí, protože čekají až zboží ještě více zlevní).

V následujících výpočtech ode všech podrobností odhlédneme a budeme uvažovat, že inflace znamená stejnoměrné znehodnocování peněz bez ohledu na dopad pro konkrétní druhy zboží.
Pokud je roční míra inflace 3% znamená to, že se ceny v za rok v průměru zvýší o 3% $\Rightarrow$ zboží, které stálo na začátku roku 100 Kč bude na konci roku stát 103 Kč.

Př. 1: Urči jakou hodnotu bude mít 100 000 Kč za rok, pokud se potvrdí roční odhad inflace ve výši 3%.

zboží za 100 Kč má na konci roku cenu	103 Kč
zboží za x Kč má na konci roku cenu	100000 Kč

přímá úměrnost

$$\frac{x}{100}=\frac{100000}{103} \Rightarrow x=\frac{100000\cdot 100}{103}=\frac{100000}{1,03}=97087 \text{ Kč}$$

Ztratili jsme skoro 3000 Kč.

Hodnotu peněz sníženou o inflaci můžeme rovnou počítat pomocí vzorce $I = \frac{I_0}{1 + \frac{p}{100}}$

Př. 2: Urči hodnotu 100 000 Kč po deseti letech, pokud se bude průměrná hodnota inflace v tomto období rovnat 3%.

Nejdříve určíme kolik peněz bude nutné po dvaceti letech na nákup zboží v hodnotě 100000 v současnosti. Poté přepočítáme hodnotu neúročených 100000.
Kolik peněz potřebujeme na nákup zboží, které mělo na začátku cenu 100000.
po 1. roce ……. $10^5 \cdot 1{,}03$
po 2. letech ……. $\left(10^5 \cdot 1{,}03\right)1{,}03 = 10^5 \cdot 1{,}03^2$ (na počátku roku by bylo potřeba $10^5 \cdot 1{,}03$ Kč)
po 3. letech ……. $10^5 \cdot 1{,}03^3$
po *x*. letech ……. $10^5 \cdot 1{,}03^x$
teď můžeme dosadit 10 let a určit množství peněz v hodnotě 100000
po 10. letech ……. $10^5 \cdot 1{,}03^{10} = 134392$ Kč
Po deseti letech potřebujeme 134392 Kč na nákup zboží, které před tím stálo 100000 Kč.
Hodnotu 100000 spočteme přímou úměrností:
134392 Kč … 100 000 Kč
100 000 Kč … *x* Kč
$\frac{x}{100000} = \frac{100000}{134392} \Rightarrow x = 100000 \cdot \frac{100000}{134392} = 74409$ Kč
Při tříprocentní inflaci bude mít 100000 Kč stejnou hodnotu, jakou má v dnešní době 74409 Kč (peníze tak ztratí přes 25% své hodnoty).

Abychom si to ještě jednou shrnuli. Pokud si nyní schováme doma do slamníku 100 000 Kč, budeme mít za deset let ve slamníku stále ještě 100 000 Kč, ale nakoupíme za ně v průměru pouze tolik zboží jako bychom nyní nakoupili za 74409 Kč.

Výsledky předchozích příkladů můžeme shrnout do vzorce:
Je-li průměrná roční míra inflace *p* procent a máme-li částku I_0 pak po *n* letech bude mít tato částka hodnotu $I = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$.

Z předchozího vyplývá, že pokud uložíme na 3% úrok peníze a zároveň bude v období, po které spoříme 3% inflace, budou mít peníze, které uspoříme stejnou hodnotu jako peníze, které jsme uložili $\Rightarrow$ nic nevyděláme.
Předchozí odstavec nijak nepopírá výhodnost spoření, protože sice nic nevyděláme, ale zároveň nic neztratíme, jako bychom ztratili, kdybychom peníze uložili do slamníku.

Mezi mírou inflace a roční úrokovou mírou dosažitelnou pro běžného vkladatele je velmi úzký vztah a za normální situace můžeme předpokládat, že úrok přibližně pokryje ztráty způsobené inflací.

Průběžné spoření

Z předchozího vyplývá, že ušetřit výraznější částku pomocí jediného vkladu je v podstatě nemožné. Klasické spoření však probíhá jinak, neuložíme pouze jednou, ale ukládáme průběžně (většinou stále stejnou částku).
Například při stavebním spoření ukládáme každý měsíc 1500 Kč.

Rozebereme si nyní tento případ:

Př. 3: Pavel si na konci roku 2008 (pro jednoduchost předpokládáme 31.12. 2008) založil osobní konto s roční úrokovou mírou 4% a měsíčním úrokovacím obdobím. Při založení účtu uložil 2000 Kč a stejnou částku pak ukládal na konci každého dalšího měsíce. Urči jakou částku si tímto způsobem našetří za 5 let. Jakou část z našetřené částky tvoří jeho vklady a jako úroky zaplacené banky?

Výsledný výraz asi nebude jednoduchý $\Rightarrow$ nebudeme počítat hodnoty, spíše se budeme snažit najít nějakou závislost, která by umožnila sestavit vzorec.
Sledujeme naspořenou částku po jednotlivých měsících:

po prvním měsíci: $2000\left(1+\frac{4}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)+2000$ (částka vložená na začátku s úroky + nově uložená částka)

po druhém měsíci: $2000\left(1+\frac{4}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)^2+2000\left(1+\frac{4}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)+2000$ (částka vložená na začátku úročená dvakrát + částka vložená po prvním měsíci úročená jednou + nově uložená částka)

po třetím měsíci:
$2000\left(1+\frac{4}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)^3+2000\left(1+\frac{4}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)^2+2000\left(1+\frac{4}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)+2000$ (částka vložená na začátku úročená třikrát + částka vložená po prvním měsíci úročená dvakrát + částka vložená po druhém měsíci úročená jednou + nově uložená částka)

$\Rightarrow$ naspořenou částku tvoří součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti $a_1 = 2000$,
$q=\left(1+\frac{4}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)$

situace po 5 letech $\Rightarrow$ sčítám $5\cdot 12+1=61$ členů (vklad na konci roku 2008 je navíc)

$$s_{61}=a_1\frac{q^{61}-1}{q-1}=2000\cdot\frac{\left(1+\frac{4}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)^{61}-1}{\left(1+\frac{4}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)-1}=132972,40\ \text{Kč}$$

Peníze vložené Pavlem: $61\cdot 2000=122000$ Kč
Úroky zaplacené bankou: $132972,4-122000=10972,4$ Kč

Př. 4: Urči kolik by Pavel naspořil za stejných podmínek za 20 let. Jakou částku by vložil on? Kolik by zaplatila banka na úrocích?

rovnou začneme dosazovat:
20 let spoření = $20 \cdot 12 + 1 = 241$ úrokovacích období
Dosadíme do vzorců:

naspořená částka: $s_{241} = a_1 \frac{q^{241} - 1}{q - 1} = 2000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{4}{100 \cdot 12} \cdot 0,85\right)^{241} - 1}{\left(1 + \frac{4}{100 \cdot 12} \cdot 0,85\right) - 1} = 690048 \text{ Kč}$

Peníze vložené Pavlem: $241 \cdot 2000 = 482000 \text{ Kč}$
Úroky zaplacené bankou: $690048 - 482000 = 208048 \text{ Kč}$

Předchozí příklad můžeme zobecnit do následujícího vzorce:

Pokud vkladatel uloží na začátku úrokovacího období částku I_0 a pak ukládá pravidelně na konci každého úrokovacího období stejnou částku I_0, pokud je úroková míra pro dané úrokovací období *p*, daň z úroků je 15%, naspoří vkladatel po uplynutí *n* úrokovacích období částku *S*, která je dána vztahem:

$$S = I_0 \left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{100}\right)^n + I_0 \left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{100}\right)^{n-1} + \ldots + I_0 \left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{100}\right)^1 + I_0$$

$$S = I_0 \frac{\left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{100}\right)^{n+1} - 1}{\left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{100}\right) - 1} = I_0 \frac{\left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{100}\right)^{n+1} - 1}{0,85 \cdot \frac{p}{100}}$$

Př. 5: Urči jakou částku by Pavel musel měsíčně spořit za stejných podmínek, aby za uvedených 20 let naspořil 1500000 Kč (přibližná cena starého panelákového bytu 3+1 v okresním městě v roce 2008). Bude mu tato naspořená částka stačit?

Můžeme ihned použít konečný vzorec z předchozího příkladu:

$$a_1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{4}{100 \cdot 12} \cdot 0,85\right)^{241} - 1}{\left(1 + \frac{4}{100 \cdot 12} \cdot 0,85\right) - 1} = 1500000$$

$a_1 = 4347,50 \text{ Kč}$

Pavel by musel spořit měsíčně částku 4347,50 Kč, aby za 20 let naspořil 1500000 Kč. Po dvaceti letech však tato částka kvůli inflaci nebude zřejmě na koupi bytu stačit

Př. 6: Urči hodnotu, kterou budou mít peníze našetřené Petrem v předchozím příkladu (1500 000 Kč), po dvaceti letech šetření. Předpokládej průměrná roční míru inflaci 2,5 %.

Současná hodnota … 1500000Kč

hodnota po 20. letech … $1500000 \cdot \left(1 - \frac{2,5}{100}\right)^{20} = 904031,50 \text{ Kč}$

Peníze, které Pavel našetří budou mít za dvacet let hodnotu 904031,50 Kč.

Poznámka: Nevýhodou našeho vzorce je, že musíme ukládat pořád stejnou částku, vždy na konci úrokovacího období. Kdybychom ukládali častěji nebo naopak méně často, náš výsledek by byl pouze přibližný (i když z předchozích příkladů víme, že rozdíly v naspořených částkách nejsou vlivem úrokovacího období příliš velké.

Př. 7: Jakou částku naspoříme pokud budeme ukládat na konci každého čtvrtletí 20000 Kč po dobu 10 let na účet s roční úrokovou mírou 3,5% a čtvrtletním úrokovacím obdobím. Daň z úroků je 15%.

Úroková míra přepočtená na čtvrtletí: $\frac{3,5}{4}$

Počet úrokovacích období: $4 \cdot 10 = 40$ (předpokládáme vklad na konci roku před začátkem spoření $\Rightarrow$ vkládali jsme 41x, úrokovalo se 40x)

$$S = I_0 \frac{\left(1+0,85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n+1}-1}{\left(1+0,85\cdot\frac{p}{100}\right)-1} = 20000\frac{\left(1+0,85\cdot\frac{3,5}{4\cdot 100}\right)^{40+1}-1}{\left(1+0,85\cdot\frac{3,5}{4\cdot 100}\right)-1} = 954649,70 \text{ Kč}$$

Př. 8: Jakou částku naspoříme pokud budeme ukládat na konci každého měsíce 5000 Kč po dobu 10 let na účet s roční úrokovou mírou 3,5% a čtvrtletním úrokovacím obdobím. Daň z úroků je 15%.

POZOR!!! Zadání příkladu neodpovídá zcela našemu vzorci. Ukládám měsíčně, ale úrokovací období je čtvrtroční $\Rightarrow$ něco musíme přepočítat.
Záleží na tom, kdy banka zjišťuje stav účtu, ze kterého platí úroky. Pokud banka zjišťuje stav účtu jednou za čtvrtroku na začátku čtvrtletí, je z hlediska spoření úplně jedno zda pošleme peníze bance třikrát na koncích měsíců nebo najednou na konci čtvrtletí, protože banka z nich začne platit úroky až v dalším čtvrtletí (používat je samozřejmě začne ihned).
$\Rightarrow$ z hlediska spoření je to stejné jako kdybychom ukládali na koncích čtvrtletí 15000 Kč.

Úroková míra přepočtená na čtvrtletí: $\frac{3,5}{4}$

Počet úrokovacích období: $4 \cdot 10 = 40$ (předpokládáme vklad na konci roku před začátkem spoření $\Rightarrow$ vkládali jsme 41x, úrokovalo se 40x)
Vkládaná částka: 15000 Kč $(3 \cdot 5000)$

$$S = I_0 \frac{\left(1+0,85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n+1}-1}{\left(1+0,85\cdot\frac{p}{100}\right)-1} = 15000\frac{\left(1+0,85\cdot\frac{3,5}{4\cdot 100}\right)^{40+1}-1}{\left(1+0,85\cdot\frac{3,5}{4\cdot 100}\right)-1} = 715987,30 \text{ Kč}$$

Naspoříme částku 715987,30 Kč.

Př. 9: Petáková:
strana 71/cvičení 65

Shrnutí: Při průběžném spoření je výsledná částka rovna součtu geometrické řady.