

9.1.3 Variace I

Předpoklady: 9101, 9102

Př. 1: Sportovního turnaje se účastní 6 týmů. Kolika způsoby mohou tyto týmy obsadit medailová místa v konečném umístění?

Vybíráme jednotlivé týmy na medailové pozice:

1. místo: 6 možností
2. místo: 5 možností (jeden tým už je vybrán na první místo)
3. místo: 4 možnosti (dva týmy na lepších pozicích)

jednotlivé výběry můžeme navzájem kombinovat \Rightarrow počet možností vynásobíme

Celkový počet možností: $6 \cdot 5 \cdot 4$

Př. 2: Na maturitním plese se 10 hlavních cen v tombole lisuje ze 250 losovaných lístků. Kolika způsoby může toto losování dopadnout?

Stejný postup jako v předchozím příkladě:

1. cena: 250 možností
2. cena: 249 možností

...

10. cena: 241 možností

Jednotlivé výběry můžeme kombinovat \Rightarrow násobíme

Losování může dopadnout $250 \cdot 249 \cdot 248 \cdot \dots \cdot 242 \cdot 241 = 794726491016623445280000$ způsoby.

Př. 3: Na zkoušení jsou připraveny dvě otázky (otázky nejsou stejné) a studenti jsou losováni náhodně. Kolika způsoby může losování dopadnout, pokud je ve třídě 31 studentů?

Stejný postup jako v předchozích příkladech:

1. otázka: 31 možností
2. otázka: 30 možností

Možnosti mohou kombinovat: $31 \cdot 30 = 930$

Losování může dopadnout $31 \cdot 30 = 930$ způsoby.

Všechny předchozí příklady jsou skoro stejné:

- mám n prvků
- z nich vybírám několik (k) prvků
- z prvků sestavuji k -tici
- záleží na pořadí
- prvky se neopakují

\Rightarrow k -tice, které jsme sestavovali se nazývají **k -členné variace**

k -členná variace z n prvků je uspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Př. 4: Urči počet k -členných variací z n prvků.

Vytváříme uspořádanou k -tici z n prvků:

1. člen: n možností

2. člen: $n-1$ možností

3. člen: $n-2$ možností (vždy odečítám od n číslo o jedna menší než kolikátý je člen)

...

$(k-1)$ -ní člen: $n-(k-2)$

k -tý člen: $n-(k-1)$

Možnosti kombinujeme: $n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

Pedagogická poznámka: Většina studentů sestaví výraz: $n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k)$, nejdříve je pouze upozorňuji, aby si přepočítali počet členů.

Počet k -členných variací z n prvků značíme $V_k(n)$ nebo $V(k, n)$. Někdy se také označuje jako variační číslo.

Pedagogická poznámka: V dalším textu budeme důsledně používat pouze zápis $V_k(n)$. Je podle mě logičtější než v nových učebnicích používaný zápis $V(k, n)$. Zápis $V_k(n)$ lépe koresponduje se zápisem permutací $P(n)$, studentům říkám, že v závorce vždy uvádíme počet prvků, ze kterých vybíráme, a jako index píšeme, kolik prvků jsme vybrali.

Počet $V_k(n)$ k -členných variací z n prvků je

$$V_k(n) = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Př. 5: Rozepiš a vypočti:

a) $V_3(4)$

b) $V_1(40)$

c) $V_3(3)$

a) $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

b) $V_1(40) = 40$

c) $V_3(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Poznámka: Zápis $n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ neznamená, že musíme dosazovat takto:

$$V_3(4) = 4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24. \text{ Samozřejmě je jednodušší ihned psát}$$

$$V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24, \text{ protože píšeme postupně součin čím dál menších čísel.}$$

Pedagogická poznámka: Kromě toho, že někteří studenti dosazují zbytečně složitě (předchozí poznámka), zjistíte, že někteří nechápou zcela význam písmene k a objevují se zápisy: $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.

Př. 6: Máme množinu se čtyřmi prvky: $M = \{a; b; c; d\}$. Vypiš všechny dvoučlenné variace sestavené z těchto čtyř prvků. Urči jejich počet pomocí vzorce.

Vypisujeme variace, přehledně podle prvního prvku:

$(a, b), (a, c), (a, d)$

$(b, a), (b, c), (b, d)$

$(c, a), (c, b), (c, d)$

$(d, a), (d, b), (d, c)$

Počet variací pomocí vzorce: $V_2(4) = 4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow$ odpovídá.

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že teprve v tomto okamžiku (i přesto, že v mnoha předcházejících příkladech jsme zmiňovali, že záleží na pořadí) začnou někteří studenti řešit, zda jsou dvojice (a, b) a (b, a) z hlediska zadání stejné nebo ne. Jinak je samozřejmě nutné zdůraznit, že při vypisování „všech možností“ je nutné postupovat systematicky (jedině tak je šance na nic nezapomenout) a že i systém zápisu „obdélníku“ může pomoci jednak při kontrole úplnosti nebo při závěrečném určování počtu všech možností.

Př. 7: Zapiš výsledky příkladů 1. až 3. pomocí variačních čísel.

Příklad 1: $6 \cdot 5 \cdot 4 = V_3(6)$

Příklad 2: $250 \cdot 249 \cdot 248 \cdot \dots \cdot 242 \cdot 241 = V_{10}(250)$

Příklad 3: $31 \cdot 30 = V_2(31)$

Př. 8: K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

- Urči počet všech vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.
- Kolik z nich má modrý pruh?
- Kolik vlajek má modrý pruh uprostřed?
- Kolik vlajek nemá uprostřed modrý pruh?
- Kolik vlajek nemá žlutý pruh?

Celkem máme k dispozici 5 barev.

a) Urči počet všech vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.

Sestavujeme uspořádanou trojici (záleží který z pruhů má kterou barvu) z pěti prvků, tedy 3-člennou variaci z pěti prvků. Počet takových vlajek: $V_3(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) Kolik z nich má modrý pruh?

K modrému pruhu na vlajce musíme vybrat dvě barvy ze čtyř zbývajících do dvou volných pruhů $\Rightarrow V_2(4)$ možností.

Všechny uvedené možnosti můžeme vystřídat s jedním ze tří možných umístění modrého pruhu \Rightarrow počet možností: $3 \cdot V_2(4) = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

c) Kolik vlajek má modrý pruh uprostřed?

Vyřešeno z minulého bodu: modrý pruh uprostřed \Rightarrow vybíráme dvě barvy na volné pruhy \Rightarrow
 $V_2(4) = 4 \cdot 3 = 12$ možností

d) Kolik vlajek nemá uprostřed modrý pruh?

Všechny vlajky můžeme rozdělit do dvou množin: vlajky s modrým pruhem uprostřed + vlajky bez modrého pruhu uprostřed \Rightarrow vlajky bez modrého pruhu uprostřed = všechny vlajky – vlajky s modrým pruhem uprostřed = $60 - 12 = 48$

Jde to spočítat i přímo:

Vlajky bez modrého pruhu uprostřed jsou tří druhů:

vlajky s modrým pruhem nahoře: $V_2(4) = 4 \cdot 3$ (vybíráme barvy do dvou volných pruhů)

vlajky s modrým pruhem dole: $V_2(4) = 4 \cdot 3$ (vybíráme barvy do dvou volných pruhů)

vlajky bez modrého pruhu: $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (sestavujeme vlajku bez modré barvy)

dohromady: $V_2(4) + V_2(4) + V_3(4) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$

e) Kolik vlajek nemá žlutý pruh?

Vlajek se žlutým pruhem je $3 \cdot V_2(4) = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ (stejně jako vlajek s modrým)

Vlajky bez žlutého pruhu = všechny vlajky – vlajky se žlutým pruhem = $60 - 36 = 24$

Jinak:

Vlajka bez žlutého pruhu = vlajka sestavovaná ze čtyř zbývajících barev \Rightarrow

$V_2(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Pedagogická poznámka: Občas se objevují i jiné způsoby řešení, vždy je potřeba dojít k jednoznačnému rozhodnutí, zda je dotýčný způsob správně nebo špatně (a pokud je špatně, je nutné zdůvodnit proč. Porovnání výsledného počtu nestačí).

Př. 9: Petáková:

strana 146/cvičení 38

strana 146/cvičení 40

strana 146/cvičení 43

Shrnutí: